CY Cergy Paris Université | **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques | **2024-2025**

Devoir surveillé N°1

La durée de ce devoir est de quarante-cinq minutes. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (3 points)

1. Donner la définition de la méthode de la dichotomie pour la recherche des zéros d'une fonction $F \in \mathcal{C}^0([x_0, y_0], \mathbb{R})$ telle que

$$F(x_0) < 0 < F(y_0).$$

2. Donner la formule des polynômes de base de Lagrange $\ell_0(X)$, …, et $\ell_N(X)$ associés aux points x_0, …, et x_N.

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, donner la définition d'un polynôme de meilleure approximation P_N d'ordre $N \geq 0$ pour cette fonction et cette norme.

Exercice 1. (7 points)

Soit $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\pi x).$$

1. Calculer les valeurs des différences divisées $f[x_0]$, $f[x_1]$, $f[x_2]$, $f[x_3]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$, $f[x_2, x_3]$, $f[x_0, x_1, x_2]$, $f[x_1, x_2, x_3]$ et $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

2. En déduire les coefficients a, b, c et d du polynôme d'interpolation de Lagrange $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3.

Exercice 2. (10 points)

1.a. Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ 2^{n-1} \leq n!$$

b. En déduire que

$$\forall x \in [0, 2[,\ e^x \leq 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2}}.$$

c. Conclure que

$$e^1 < 4, \quad \text{et} \quad 2\ln(2) > 1.$$

2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

a. Vérifier que la fonction f est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire qu'il existe un unique nombre $m > 1$ tel que

$$f'(m) = 0.$$

c. En déduire que la fonction f possède exactement deux zéros z_1 et z_2 dans $[0, +\infty[$ qui satisfont

$$0 < z_1 < 1 < z_2.$$

d. Combien la fonction f possède-t-elle de zéros réels ?

3. Soit

$$\forall x \in [0, 1],\ g(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

a. Vérifier que la fonction g est une contraction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

b. Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$x_0 \in [0, 1], \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n^2}{2}}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et convergente de limite égale au zéro z_1.

4. Soit

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ h(x) = \sqrt{2 \ln(2) + 2 \ln(x)}.$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$y_0 \in [1, +\infty[, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ y_{n+1} = h(y_n),$$

est bien définie et convergente de limite égale au zéro z_2.