Devoir à la maison N°2

Exercice 1. *Méthode de Gauss-Tchebychev.*

Considérons la famille des polynômes orthogonaux de Tchebychev $(T_n)_{n\geq 0}$ définis par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

Pour $n \geq 1$, le polynôme T_n possède n racines distinctes $(t_i^n)_{0\leq i\leq n-1}$ égales à :

$$\forall 0 \leq i \leq n-1,\, t_i^n = \cos\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\Big).$$

Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, les méthodes de quadrature élémentaire de Gauss-Tchebychev approchent l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi} f(\cos(\theta))\,d\theta,$$

par la formule

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^n f(t_i^n),$$

où les nombres $(\lambda_i^n)_{0\leq i\leq n-1}$ sont donnés par

$$\forall 0 \leq i \leq n-1,\, \lambda_i^n = \int_0^{\pi} \prod_{0\leq j\neq i\leq n-1} \Big(\frac{\cos(\theta) - t_j^n}{t_i^n - t_j^n}\Big)\,d\theta.$$

1.a. Définir une fonction *SimpComp* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et le nombre M d'intervalles de la subdivision $(x_m)_{0\leq m\leq M}$ définie par :

$$\forall 0 \leq m \leq M,\, x_m = a + \frac{m}{M}\big(b-a\big),$$

et renvoie la valeur de la méthode de quadrature composée de Simpson pour la fonction g :

$$SimpComp(a,b,g,M) = \frac{b-a}{6M} \sum_{m=0}^{M-1} \Big(g(x_m) + 4 * g\Big(\frac{x_m + x_{m+1}}{2}\Big) + g(x_{m+1})\Big).$$

b. À l'aide de la fonction *SimpComp*, définir une fonction *Coefficients* qui prend en entrée un entier $n \geq 1$, et renvoie la liste des coefficients $(\lambda_i^n)_{0\leq i\leq n-1}$.

c. Définir une fonction *GaussTcheElem* qui prend en entrée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et un entier $n \geq 1$, et renvoie la valeur de la méthode de quadrature élémentaire de Gauss-Tchebychev $\sigma_n(f)$ pour la fonction f.

d. Sachant que

$$\forall p \geq 0,\, \int_{-1}^{1} \frac{x^{2p}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)^{2p}\,d\theta = \frac{\pi}{4^p}\binom{2p}{p},$$

vérifier pour $n = 5$ et $n = 10$ que l'ordre de la méthode de Gauss-Tchebychev σ_n est égal à $2n - 1$.

2.a. À l'aide de la méthode de Gauss-Tchebychev, définir une fonction *GaussTchebychev* qui prend en entrée deux nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et un entier $n \geq 1$, et renvoie une valeur approchée de l'intégrale :

$$I(g) = \int_a^b g(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g\Big(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\Big)\, dt.$$

b. *Application.* Soit

$$\forall x \in [0, 1],\ g(x) = e^x.$$

Comparer à l'aide du calcul de l'intégrale $I(g)$ la précision de la méthode de Gauss-Tchebychev à celle de la méthode de Simpson, le nombre d'appels de la fonction g étant fixé.

Exercice 2. *Chute d'un corps.*

Considérons la chute verticale d'un corps de masse $m > 0$, d'altitude initiale $h_0 > 0$ et de vitesse initiale $v_0 < 0$ sous l'effet d'un champ gravitationnel $g > 0$. Notons $h(t)$ son altitude au temps t, et $v(t) = h'(t)$ sa vitesse au temps t. En présence d'une force de frottement de la forme $F(t) = -av(t)$, dans laquelle le coefficient de frottement $a > 0$ est constant, le second principe de la dynamique conduit au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T_a],\ mv'(t) = -mg - av(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{C}$$

où $T_a > 0$ désigne le temps au bout duquel la chute du corps se termine à l'altitude $h = 0$. Rappelons que la solution de ce problème est donnée par l'expression :

$$\forall t \in [0, T_a],\ v_a(t) = v_0\, e^{-\frac{at}{m}} - \frac{mg}{a}\Big(1 - e^{-\frac{at}{m}}\Big),$$

et que le temps maximal T_a est caractérisé par l'équation :

$$T_a = \frac{ah_0}{mg} + \Big(\frac{v_0}{g} + \frac{m}{a}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{aT_a}{m}}\Big).$$

Nous fixons dans la suite les valeurs numériques

$$m = 75, \quad h_0 = 1\,000, \quad v_0 = -0,1 \quad \text{et} \quad g = 9,81,$$

et nous notons

$$\forall v \in \mathbb{R},\ F(v) = -g - \frac{a}{m}v.$$

1.a. Définir une fonction *TMax* qui prend en entrée un nombre $a > 0$, et renvoie une valeur approchée de l'ordre de 10^{-15} près du temps maximal T_a.

b. Tracer le graphe de la fonction *TMax* sur le segment $[0,01\,, 20]$.

c. Étant donné un entier $N \geq 1$ et un nombre $a > 0$, nous notons dans toute la suite $h_a = T_a/N$. Définir une fonction *Vitesse* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un entier $N \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs de la fonction v_a aux temps $(t_n = n\, h_a)_{0 \leq n \leq N}$.

d. Pour $N = 100$, tracer dans deux figures différentes le graphe de la fonction v_a sur le segment $[0, T_a]$ pour $a = 1$ et $a = 20$.

2.a. Définir une fonction *PntMil* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(v_n^1)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution v_a aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, qui sont données par la méthode du point milieu :

$$v_0^1 = v_0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,\, v_{n+1}^1 = v_n^1 + h_a F\Big(v_n^1 + \frac{h_a}{2} F(v_n^1)\Big).$$

b. Tracer dans deux figures différentes les solutions approchées $(v_n^1)_{0 \leq n \leq 100}$, obtenues par la fonction $PntMil(a, 100)$ pour $a = 1$ et $a = 20$, et les solutions exactes associées v_a.

c. Définir une fonction *ErrMaxPM* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$E_{PM}(a, N) = \max_{0 \leq n \leq N} |v_a(t_n) - v_n^1|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode du point milieu, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(N) \mapsto \ln(E_{PM}(1, N))$ pour $1 \leq N \leq 100$.

3.a. Définir une fonction *CraNic* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(v_n^2)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution v_a aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, qui sont données par la méthode de Crank-Nicholson :

$$v_0^2 = v_0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,\, v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{h_a}{2}\Big(F\big(v_n^2\big) + F(v_{n+1}^2)\Big).$$

b. Tracer dans deux figures différentes les solutions approchées $(v_n^2)_{0 \leq n \leq 100}$, obtenues par la fonction $CraNic(a, 100)$ pour $a = 1$ et $a = 20$, et les solutions exactes associées v_a.

c. Définir une fonction *ErrMaxCN* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$E_{CN}(a, N) = \max_{0 \leq n \leq N} |v_a(t_n) - v_n^2|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode de Crank-Nicholson, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(N) \mapsto \ln(E_{CN}(1, N))$ pour $1 \leq N \leq 100$ sur la même figure que celle de la question 2.c.

4.a. Définir une fonction *RK4* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie la liste des valeurs approchées $(v_n^3)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution v_a aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, qui sont données par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$v_0^3 = v_0,$$

et

$$\begin{aligned}\forall 0 \leq n \leq N-1,\, v_{n+1}^3 = v_n^3 + \frac{h_a}{6}\Bigg(& F\big(v_n^3\big) + 2F\Big(v_n^3 + \frac{h_a}{2} F(v_n^3)\Big) \\ & + 2F\Big(v_n^3 + \frac{h_a}{2} F\Big(v_n^3 + \frac{h_a}{2} F(v_n^3)\Big)\Big) + F\Big(v_n^3 + h_a F\Big(v_n^3 + \frac{h_a}{2} F\Big(v_n^3 + \frac{h_a}{2} F(v_n^3)\Big)\Big)\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

b. Tracer dans deux figures différentes les solutions approchées $(v_n^3)_{0 \leq n \leq 100}$, obtenues par la fonction $RK4(a, 100)$ pour $a = 1$ et $a = 20$, et les solutions exactes associées v_a.

c. Définir une fonction *ErrMaxRK* qui prend en entrée un nombre $a > 0$ et un nombre $N \geq 1$, et renvoie l'erreur maximale

$$E_{RK}(a, N) = \max_{0 \leq n \leq N} |v_a(t_n) - v_n^3|,$$

entre la solution exacte et celle obtenue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, puis tracer la courbe représentative de la fonction $\ln(N) \mapsto \ln(E_{RK}(1, N))$ pour $1 \leq N \leq 100$ sur la même figure que celle de la question 3.c.