Devoir à la maison N°2

Soit $N \geq 0$. Considérons $N+1$ points deux à deux distincts x_0, x_1, ..., x_N de $\mathbb{R}$, et une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de chacun de ces points. L'objectif de ce devoir est d'introduire, puis de calculer le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f aux points x_0, ..., x_N, soit l'unique polynôme réel $H_f(X)$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, H_f(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad H_f'(x_i) = f'(x_i).$$

I. Étude mathématique (12 points)

1. Vérifier qu'il existe au plus un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

2. Soit

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P_i(X) = \ell_i(X)^2,$$

où $\ell_0(X)$, ..., $\ell_N(X)$ désignent les polynômes de base de Lagrange aux points x_0, ..., x_N donnés par les formules

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, \ell_i(X) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

a. Pour $0 \leq i \leq N$, vérifier que

$$P_i(x_i) = 1, \quad P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\, P_i(x_j) = P_i'(x_j) = 0.$$

b. Vérifier qu'il existe un unique couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que le polynôme $Q_i(X) = (a_i X + b_i)\, P_i(X)$ satisfait

$$Q_i(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = f'(x_i).$$

c. En déduire qu'il existe un unique polynôme $H_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, H_f(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad H_f'(x_i) = f'(x_i).$$

d. Vérifier que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\big(1 - 2\ell_i'(x_i)(X - x_i)\big)\ell_i(X)^2 + \sum_{i=0}^{N} f'(x_i)\big(X - x_i\big)\ell_i(X)^2.$$

3.a. Montrer qu'il existe deux familles réelles uniques $(\alpha_i)_{0\leq i\leq N}$ et $(\beta_i)_{0\leq i\leq N}$, et une famille unique de polynômes $(R_i(X))_{0\leq i\leq N+1}$ telles que

$$R_0(X) = H_f(X), \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq N,\ R_i(X) = \alpha_i + \beta_i(X - x_i) + (X - x_i)^2 R_{i+1}(X).$$

b. Vérifier que

$$R_{N+1}(X) = 0.$$

c. En déduire que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \big(\alpha_i + \beta_i(X - x_i)\big) \prod_{j=0}^{i-1} (X - x_j)^2.$$

4.a. Vérifier que

$$\alpha_0 = f(x_0), \quad \text{et} \quad \beta_0 = f'(x_0).$$

b. Notons $f_0 = f$, et considérons les fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ définies par

$$\forall 0 \leq i \leq N-1,\ f_{i+1}(x) = \frac{f_i(x) - f_i(x_i) - f_i'(x_i)(x - x_i)}{(x - x_i)^2}.$$

Vérifier que les fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_i, … et x_N.

c. Soit $1 \leq i \leq N$. Montrer que

$$\alpha_i = f_i(x_i), \quad \text{et} \quad \beta_i = f_i'(x_i),$$

et que le polynôme $R_i(X)$ est le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_i aux points x_i, …, x_N.

II. Aspect numérique (8 points)

1.a. Définir une fonction `Base` qui prend en entrée un entier $0 \leq \mathtt{i} \leq N$, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme $\ell_{\mathtt{i}}(X)$.

b. Définir une fonction `DerivBase` qui prend en entrée un entier $0 \leq \mathtt{i} \leq N$ et une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$, et renvoie la valeur au point $x_{\mathtt{i}}$ du polynôme dérivée $\ell'_{\mathtt{i}}$.

c. Utiliser les fonctions `Base` et `DerivBase` pour définir une fonction `Hermite1` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, sa dérivée `g`, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme d'interpolation de Hermite $H_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, et x_N.

2.a. Définir une fonction `CoeffHermite` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, sa dérivée `g` et une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$, et renvoie les deux listes des coefficients $(\alpha_i)_{0\leq i\leq N}$ et $(\beta_i)_{0\leq i\leq N}$ du polynôme d'interpolation de Hermite $H_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, x_N.

b. Utiliser la fonction `CoeffHermite` pour définir une fonction `Hermite2` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, sa dérivée `g`, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme d'interpolation de Hermite $H_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, x_N.

3. Utiliser la définition des polynômes $(R_i)_{0\leq i\leq N}$ pour définir une fonctions récursive `Hermite3` qui prend en entrée une fonction de la variable réelle `f`, sa dérivée `g`, une liste de coefficients $\mathtt{X} = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme d'interpolation de Hermite $H_{\mathtt{f}}(X)$ aux points x_0, …, x_N.

4. Comparer numériquement la rapidité des algorithmes `Hermite1`, `Hermite2` et `Hermite3`.