CY Cergy Paris Université | **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques | **2023-2024**

Devoir à la maison N°1

L'objectif de ce devoir est de déterminer les racines des polynômes de Tchebychev de seconde espèce. Ces polynômes, notés U_n, sont définis par la formule de récurrence

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\, U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}.$$

I. Étude mathématique (8 points)

1.a. Calculer les polynômes de Tchebychev U_2, U_3, U_4 et U_5.

b. Quel est le degré du polynôme U_n ? Quel est son coefficient dominant ?

2.a. Soit $n \geq 1$. Vérifier que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, \sin\big((n+2)\theta\big) + \sin(n\theta) = 2\sin\big((n+1)\theta\big)\cos(\theta).$$

b. Soit $n \geq 0$. En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\, U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

c. Montrer que U_n est l'unique polynôme à coefficients réels qui satisfait cette formule.

3.a. Soit $n \geq 1$. Montrer que le polynôme U_n possède n racines distinctes qui sont données par les formules

$$r_n^k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

pour $1 \leq k \leq n$.

b. Vérifier que les racines des polynômes U_n et U_{n+1} sont entrelacées, autrement dit que

$$\begin{cases} r_n^1 < r_{n+1}^1 < 1, \\ \forall 1 \leq k \leq n-1,\, r_n^{k+1} < r_{n+1}^{k+1} < r_n^k, \\ -1 < r_{n+1}^{n+1} < r_n^n. \end{cases}$$

II. Aspect numérique (12 points)

1.a. Définir une fonction `Tchebychev` qui prend en entrée un entier `n` et renvoie la liste croissante des coefficients du polynôme $U_{\mathtt{n}}$.

b. Définir une fonction `Valeur` qui prend en entrée un entier `n` et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme $U_{\mathtt{n}}$.

c. Tracer les courbes représentatives des fonctions polynômes associées aux polynômes U_0, U_1, U_2 et U_3 sur le segment $[-1, 1]$.

2. Soit $n \geq 1$. Rappelons que les racines des polynômes U_n et U_{n+1} sont entrelacées. Nous allons utiliser cette propriété pour déterminer par la méthode de la dichotomie entre r_n^1 et 1, une valeur approchée de r_{n+1}^1, puis entre r_n^2 et r_n^1, une valeur approchée de r_{n+1}^2, …, et enfin entre -1 et r_n^n, une valeur approchée de r_{n+1}^{n+1}.

a. Définir une fonction `Dichotomie` qui prend en entrée une fonction de la variable réel `f`, deux nombres réels `a` et `b` et une erreur `eps`, et renvoie le résultat obtenu par la méthode de la dichotomie appliquée à la fonction `f` et aux points `a` et `b`, stoppée lorsqu'une erreur au plus de l'ordre de `eps` est atteinte.

b. Définir une fonction `Racines1` qui prend en entrée un entier `n` ≥ 1 et renvoie à l'aide de la méthode de la dichotomie, la liste des valeurs approchées des racines du polynôme $U_{\mathtt{n}}$ à une erreur de 10^{-15} près.

c. Imprimer la liste des racines du polynôme U_{10} obtenue par la fonction `Racines1`, et vérifier que les éléments de cette liste sont bien des valeurs approchées des racines de ce polynôme.

3. Soit $n \geq 1$. Nous cherchons désormais à déterminer les racines du polynôme U_n par la méthode de Newton.

a. Définir une fonction `Newton` qui prend en entrée une fonction de la variable réel `f`, sa dérivée `g`, un nombres réel `a` et une erreur `eps`, et renvoie le résultat obtenu par la méthode de Newton appliquée à la fonction `f` et au point `a`, stoppée lorsqu'une erreur au plus de l'ordre de `eps` est atteinte.

b. Définir une fonction `Derivee` qui prend en entrée un entier `n` et un nombre réel `x`, et renvoie la valeur au point `x` du polynôme dérivé $U'_{\mathtt{n}}$.

c. Définir une fonction `Racines2` qui prend en entrée un entier `n` ≥ 1 et renvoie à l'aide de la méthode de Newton, la liste des valeurs approchées des racines du polynôme $U_{\mathtt{n}}$ à une erreur de 10^{-15} près.

d. Imprimer la liste des racines du polynôme U_{10} obtenue par la fonction `Racines2`, et vérifier que ces valeurs sont identiques à celles obtenues par la fonction `Racines1`.