CY Cergy Paris Université | **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques | **2024-2025**

Devoir à la maison N°1

Exercice 1. *Méthode d'Archimède.*

Nous cherchons à calculer une valeur approchée du nombre π par la méthode d'Archimède, à l'aide de la méthode de Héron.

1. Définir une fonction *Heron* qui prend en entrée deux nombres $a > 0$ et $\varepsilon > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron :

$$x_0 = \frac{1+a}{2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n},$$

à une erreur de l'ordre de ε près.

2. Soit

$$\forall n \geq 1,\, c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad s_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Nous rappelons que ces suites vérifient $c_1 = 0$, $s_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1,\, c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \quad \text{et} \quad s_{n+1} = \sqrt{\frac{1-c_n}{2}}.$$

a. Définir une fonction *Trigo* qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et un nombre $\varepsilon > 0$, et renvoie une valeur approchée des nombres c_n et s_n calculés par la fonction *Heron*, à une erreur de l'ordre de ε près.

b. Définir une fonction *Archimede* qui prend en entrée un entier $n \geq 1$ et un nombre $\varepsilon > 0$, et renvoie une valeur approchée du nombre π, après n itérations de la fonction *Trigo* avec une erreur de l'ordre de ε.

3.a. Pour $\varepsilon = 10^{-15}$ fixé, tracer la courbe qui à un entier $1 \leq n \leq 50$, associe la valeur donnée par la fonction $Archimede(n, \varepsilon)$.

b. Tracer dans une même fenêtre graphique la courbe qui à un entier $1 \leq n \leq 50$ associe la valeur $2^n \sin(\pi/2^n)$.

c. Qu'observez-vous ? Comment interprétez-vous cette observation ?

Exercice 2. *Algorithme des différences divisées.*

1.a. Définir une fonction *DifferenceDivisee* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f et une liste de coefficients $X = [x_0, \ldots, x_N]$, et renvoie la table des différences divisées successives de la fonction f aux points x_0, …, et x_N, définies par les formules de récurrence :

$$\forall 0 \leq k \leq N,\, f[x_k] = f(x_k),$$

et

$$\forall 0 \leq j < k \leq N,\, f[x_j, \ldots x_k] = \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_k] - f[x_j, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}.$$

b. Définir une fonction *Horner* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f et une liste de coefficients $X = [x_0, \ldots, x_N]$, et renvoie la liste croissante des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ aux points x_0, ..., et x_N, à l'aide de l'algorithme de Hörner :

$$Q_N(X) = f[x_0, \ldots, x_N], \text{ et } \forall 0 \leq j \leq N-1,\, Q_j(X) = f[x_0, \ldots, x_j] + (X - x_j)\, Q_{j+1}(X),$$

au terme duquel $Q_0(X) = P_f(X)$.

c. Définir une fonction *Lagrange* qui prend en entrée une fonction de la variable réelle f, une liste de coefficients $X = [x_0, \ldots, x_N]$ et un nombre réel x, et renvoie le calcul par la méthode de Hörner de la valeur au point x du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ aux points x_0, ..., et x_N.

2. *Application.* Soit $y_0 = -2$, $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ et $y_4 = 2$. Considérons la fonction

$$\forall y \in \mathbb{R},\, u(y) = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

a. Donner la liste des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange P_u aux points y_0, ... et y_4.

b. Tracer sur le segment $[-3, 3]$ les graphes de la fonction u et du polynôme d'interpolation de Lagrange P_u obtenu par la fonction *Lagrange*.