GRAVEJAT Philippe

L3

22/09/22

TD N°4 : Résolution approchée des équations différentielles ordinaires

I 1.a. Soit $\forall v \in \mathbb{R}$, $F(v) = -g - \frac{\alpha}{m} v$; comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée constante, le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure l'existence d'une unique solution globale.

b. $\forall t \in [0,T]$, $\left(v(t)\, e^{\frac{\alpha}{m}t}\right)' = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(v'(t) + \frac{\alpha}{m} v(t)\right) = -g\, e^{\frac{\alpha t}{m}} \Rightarrow v(t) = v_0\, e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$.

2.a. $\forall t \in [0,T]$, $h(t) = h_0 + \int_0^t v(s)\,ds = h_0 - \frac{mgt}{\alpha} + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$; comme T est caractérisé par l'équation $h(T) = 0$, l'équation recherchée est : $\frac{mgT}{\alpha} + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha T}{m}} = h_0 + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)$.

b. Soit $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = \frac{mgt}{\alpha} + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{m}}$; φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $\varphi(0) = \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)$, $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, et $\forall t > 0$, $\varphi'(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) - v_0\, e^{-\frac{\alpha t}{m}} > 0 \Rightarrow \varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\left[\frac{m}{\alpha}\left(\frac{mg}{\alpha} + v_0\right), +\infty\right[$; comme $h_0 > 0$, il existe un unique nombre $T > 0$ tel que $\varphi(T) = h_0 + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 + \frac{mg}{\alpha}\right)$.

II 1. Si (C_0) a une solution y, alors : $0 = 0\, y'(0) = 2y(0) + 1 = 3$, ce qui est absurde !

2.a. Soit $\forall (t,y) \in I_0 \times \mathbb{R}$, $F(t,y) = \frac{2y+1}{t}$; comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale dont l'intervalle de définition J_0 est inclus dans I_0.

b. $\forall t \in J_0$, $\left(\frac{y(t)}{t^2}\right)' = \frac{1}{t^3} \Rightarrow y(t) = \frac{3t^2}{2t_0^2} - \frac{1}{2} \Rightarrow J_0 = I_0$, et $\forall t \in I_0$, $y(t) = \frac{3t^2}{2t_0^2} - \frac{1}{2}$.

c. Observons que : $y(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$ et $y'(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$; par le calcul précédent, quelle que soit la solution y de l'équation différentielle, $\forall t \in \mathbb{R}_{(-)}^{+*}$, $t y'(t) - 2y(t) = 1$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}_{(-)}^{+*}$, $y(t) = a t^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$ et $y'(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ Il est possible de prolonger la solution y de la question 2.b en posant $\forall t \in \mathbb{R} \setminus I_0$, $y(t) = a t^2 - \frac{1}{2}$ où $a \in \mathbb{R}$; la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation différentielle sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ L'intervalle maximal possible est $\mathbb{R}$.

III 1.a. Soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $F(t,x) = e^{-tx}$; comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (C_1) admet une unique solution maximale x par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

b. $\forall t>0$, $\forall x<y<0$, $|F(t,x)-F(t,y)| = \left| t(y-x)\int_0^1 e^{-t(sx+(1-s)y)}\,ds \right| \geq$ $|t|\,|x-y|\,e^{-ty} \Rightarrow \left|\frac{F(t,x)-F(t,y)}{x-y}\right| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow$ La fonction F ne satisfait pas les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

2.a. Soit $\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2$, $G(t,x)=e^{-|tx|}$; comme $\forall (t,x,y)\in\mathbb{R}^3$, $|G(t,x)-G(t,y)| = \left||t|(|y|-|x|)\int_0^1 e^{-|t|(s|x|+(1-s)|y|)}\,ds\right| \leq |t|\,|x-y|$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale y de (C_2), dont l'intervalle de définition I est inclus dans $\mathbb{R}$; comme $\forall t\in I$, $|y'(t)|\leq 1$, $|y(t)|\leq |t|$, donc par le théorème de sortie de tout compact, $I=\mathbb{R}$.

b. Comme $\forall t\in\mathbb{R}$, $y'(t)>0$ et $y(0)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $y(t)$ a même signe que $t \Rightarrow$ $t\,y(t)\geq 0$.

c. Comme $\forall t\in\mathbb{R}$, $t\,y(t)\geq 0$, $y'(t)=e^{-t\,y(t)} \Rightarrow y$ est solution de (C_1) ; par unicité, $x=y$, et (C_1) possède une solution x globale.

IV 1.a. x_* est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $x_*'(t)=0$ si $t<0$, $2t$ si $t>0$; comme $x_*(t) \xrightarrow[t\to 0_\pm]{} 0 = x(0)$ et $x_*'(t) \xrightarrow[t\to 0_\pm]{} 0$, x_* se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t\in\mathbb{R}$, $x_*'(t)=0$ si $t\leq 0$, $2t$ si $t>0$.

b. Comme $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sqrt{|x_*(t)|}=0$ si $t\leq 0$, $2t$ si $t>0$, x_* est solution de (C).

2. Pour un temps T (par exemple >0) fixé et un pas $h=\frac{T}{N}$ donné (avec $N\geq 1$), le schéma d'Euler explicite s'écrit : $x_0=0$ et $\forall 0\leq n\leq N-1$, $x_{n+1}=x_n+h\sqrt{|x_n|}$; par récurrence, $\forall 0\leq n\leq N$, $x_n=0$, ce qui ne permet pas d'approcher la solution x_*.

V 1. $\forall t\geq 0$, $(y(t)e^{-ct})' = e^{-ct}(y'(t)-c\,y(t)) \leq b e^{-ct} \Rightarrow y(t)e^{-ct}-y(0) \leq \frac{b}{c}(1-e^{-ct}) \Rightarrow y(t) \leq y(0)e^{ct}+\frac{b}{c}(e^{ct}-1)$.

2. a. Par définition, $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=y_{n+1}+\frac{b}{c} \leq (1+ch)y_n+bh+\frac{b}{c} \leq (1+ch)z_n$.

b. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_n\leq (1+ch)^n z_0 \Rightarrow y_n \leq (1+ch)^n y_0+\frac{b}{c}((1+ch)^n-1)$.

VI 1.a. $\forall t\in\mathbb{R}$, $x(t)=t^2$ (qui est l'unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz global).

b. $x_0=0$ et $\forall 0\le n\le N-1$, $x_{n+1}=x_n+h\,(-10(x_n-t_n^2)+2t_n)=(1-10h)x_n+h(10t_n^2+2t_n)$

c. $\forall 0\le n\le N-1$, $e_{n+1}=-x_{n+1}+(t_n+h)^2=(1-10h)(t_n^2-x_n)+2ht_n+h^2-2ht_n=(1-10h)e_n+h^2$.

d. Soit $\forall 0\le n\le N$, $f_n=e_n-\frac{h}{10}$; $\forall 0\le n\le N-1$, $f_{n+1}=(1-10h)(f_n+\frac{h}{10})+h^2-\frac{h}{10}=(1-10h)f_n$ $\Rightarrow \forall 0\le n\le N$, $f_n=(1-10h)^n f_0 \Rightarrow e_n=\frac{h}{10}+(1-10h)^n(e_0-\frac{h}{10})=\frac{h}{10}\left(1-(1-10h)^n\right)$.

2.a. $\forall t\in\mathbb{R}$, $y(t)=t^2$ (qui est l'unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz global).

b. $y_0=0$ et $\forall 0\le n\le N-1$, $y_{n+1}=y_n+h(10(y_n-t_n^2)+2t_n)=(1+10h)y_n+h(2t_n-10t_n^2)$.

c. $\forall 0\le n\le N-1$, $\varepsilon_{n+1}=(t_n+h)^2-y_{n+1}=(1+10h)(t_n^2-y_n)+2ht_n-2ht_n+h^2=(1+10h)\varepsilon_n+h^2$

d. Soit $\forall 0\le n\le N$, $\delta_n=\varepsilon_n+\frac{h}{10}$; $\forall 0\le n\le N-1$, $\delta_{n+1}=(1+10h)\,\delta_n \Rightarrow \forall 0\le n\le N$, $\delta_n=(1+10h)^n\delta_0 \Rightarrow \varepsilon_n=\frac{h}{10}\left[(1+10h)^n-1\right]$.

3. D'après les questions 1d et 2d, $\forall 0\le n\le NT$, $e_n=\frac{h}{10}\left(1-(1-10h)^n\right)$; comme $10h=\frac{10}{N}\in]0,1[$, $e_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{h}{10}$; tandis que $\forall 0\le n\le NT$, $\varepsilon_n=\frac{h}{10}\left[(1+10h)^n-1\right]$; comme $1+10h>1$, $\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ $\Rightarrow$ le comportement asymptotique de l'erreur est correct pour le premier problème de Cauchy, mais très mauvais pour le second.

VI 1.a. Par définition du schéma numérique de Crank-Nicholson, à chaque étape, le nombre y_{n+1} est solution de l'équation $y_{n+1}-\frac{h}{2}f(t_n+h,y_{n+1})=y_n+\frac{h}{2}f(t_n,y_n)$; il s'agit donc d'une méthode à un pas de type implicite pour la fonction : $\forall (t,y,h)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$, $\Phi(t,y,h)=\frac{1}{2}\left\{f(t,y)+f\left(t+h,\left[Id-\frac{h}{2}f(t+h,\cdot)\right]^{-1}\left(y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)\right)\right\}$.

b. Pour $z\in\mathbb{R}$, posons : $\forall y\in\mathbb{R}$, $g(y)=\frac{h}{2}f(t+h,y)+z$, où $(t,h)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+^*$; $\forall (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $|g(y_1)-g(y_2)|\le\frac{Kh}{2}|y_1-y_2|\Rightarrow g$ est $\frac{Kh}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$; lorsque $\frac{Kh}{2}<1$, $\exists!\, y_z\in\mathbb{R}$ t.q. $g(y_z)=y_z\Leftrightarrow y_z-\frac{h}{2}f(t+h,y_z)=z$; d'après la question 1.a, cette propriété assure par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie $\Rightarrow$ la méthode de Crank-Nicholson est bien définie lorsque $Kh<2$.

2.a. Comme $\forall (t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, $\Phi(t,y,0)=\frac{1}{2}\left[f(t,y)+f(t,y)\right]=f(t,y)$, la méthode de Crank-Nicholson est consistante.

b. Soit $(t,y_1,y_2)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$. Notons z_1 et z_2 les solutions des équations $z_1-\frac{h}{2}f(t+h,z_1)=y_1+\frac{h}{2}f(t,y_1)$ et $z_2-\frac{h}{2}f(t+h,z_2)=y_2+\frac{h}{2}f(t,y_2)$ (qui existent par la question 1.b) ; comme $|f(t+h,z_1)-f(t+h,z_2)|\le K|z_1-z_2|$, $\left|z_1-\frac{h}{2}f(t+h,z_1)-z_2+\frac{h}{2}f(t+h,z_2)\right|\ge\left(1-\frac{Kh}{2}\right)|z_1-z_2|\ge\left(1-K\frac{h_{max}}{2}\right)|z_1-z_2|\Rightarrow\left(1-K\frac{h_{max}}{2}\right)|z_1-z_2|\le|y_1

$+ \frac{h}{2} f(t,y_1) - z_1 - \frac{h}{2} f(t,z_1)| \leq \left(1 + \frac{Kh_{max}}{2}\right) |y_1 - z_1| \Rightarrow |\Phi(t,y_1,h) - \Phi(t,z_1,h)|$
$= \frac{1}{2} |f(t,y_1) + f(t+h,y_2) - f(t,z_1) - f(t+h,z_2)| \leq \frac{K}{2} \left[|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|\right]$
$\leq \frac{K}{2} \left[1 + \frac{1 + \frac{Kh_{max}}{2}}{1 - \frac{Kh_{max}}{2}}\right] |y_1 - z_1| \leq \frac{2K}{1 - Kh_{max}} |y_1 - z_1| \Rightarrow$ La méthode de Crank-Nicholson est stable.

c. Comme la méthode de Crank-Nicholson est consistante et stable, elle est convergente.

d. Comme la méthode de Crank-Nicholson est consistante, elle est d'ordre supérieur ou égal à 1; soit alors $\forall\, 0 \leq h \leq h_{max}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(h,y) = \left[Id - \frac{h}{2} f(t+h,.)\right]^{-1}(y)$ (où $t \in [0,T]$ est fixé); par définition, $g(h,y) - \frac{h}{2} f(t+h, g(h,y)) = y \Rightarrow \partial_h g(h,y) - \frac{h}{2} \partial_t f(t+h, g(h,y))$ $- \frac{1}{2} f(t+h, g(h,y)) - \frac{h}{2} \partial_h g(h,y)\, \partial_y f(t+h, g(h,y)) = 0 \Rightarrow \partial_h g(h,y) = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \partial_y f(t+h, g(h,y))}$ $\left(\frac{1}{2} f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_t f(t+h, g(h,y))\right)$ (qui est bien défini car $|\partial_y f(t+h, g(h,y))| \leq K$); comme $\Phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)))\right]$, $\partial_h \Phi(t,y,h) =$ $\frac{1}{2} \partial_t f(t+h, g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y))) + \frac{1}{2} \partial_y f(t+h, g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)))\, (\partial_h g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + \frac{f(t,y)}{2}$ $\partial_y g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)))$; comme $\partial_y g(h,y) = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \partial_y f(t+h, g(h,y))}$, il vient : $\partial_h \Phi(t,y,0)$ $= \frac{1}{2}\left[\partial_t f(t,y) + f(t,y)\, \partial_y f(t,y)\right] \Rightarrow$ La méthode de Crank-Nicholson est d'ordre supérieure ou égal à 2; de même, $\partial_{hh} \Phi(t,y,h) = \frac{1}{2} \partial_{tt} f(t+h, g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y))) + \partial_{ty} f(t+h,$ $g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)))\, \left[\partial_h g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + \frac{f(t,y)}{2} \partial_y g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y))\right] + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(t+h,$ $g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)))\, \left[\partial_h g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + \frac{1}{2} f(t,y)\, \partial_y g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y))\right]^2 + \frac{1}{2} \partial_y f(t+h, g(h,$ $y + \frac{h}{2} f(t,y)))\, \left[\partial_{hh} g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + f(t,y)\, \partial_{hy} g(h, y + \frac{h}{2} f(t,y)) + \frac{f(t,y)^2}{4} \partial_{yy} g\right.$ $\left.(h, y + \frac{h}{2} f(t,y))\right] \Rightarrow \partial_{hh} \Phi(t,y,0) = \frac{1}{2} \partial_{tt} f(t,y) + f(t,y)\, \partial_{ty} f(t,y) + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(t,y)\, f(t,y)^2$ $+ \frac{1}{2} \partial_y f(t,y) \left[\partial_{hh} g(0,y) + f(t,y)\, \partial_{hy} g(0,y) + \frac{f(t,y)^2}{4} \partial_{yy} g(0,y)\right]$; comme $\partial_h g(0,y) =$ $\frac{1}{2} f(t,y)$ et $\partial_y g(0,y) = 1$, $\partial_{hy} g(0,y) = \frac{1}{2} \partial_y f(t,y)$ et $\partial_{yy} g(0,y) = 0$; comme $\partial_{hh} g(h,y) = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \partial_y f(t+h, g(h,y))} \left(\frac{1}{2} \partial_t f(t+h, g(h,y)) + \frac{1}{2} \partial_h g(h,y)\, \partial_y f(t+h, g(h,y))\right.$ $\left. + \frac{1}{2} \partial_t f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_{tt} f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_h g(h,y)\, \partial_{ty} f(t+h, g(h,y))\right) +$ $\frac{1}{\left(1 - \frac{h}{2} \partial_y f(t+h, g(h,y))\right)^2} \left(\frac{1}{2} \partial_y f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_{ty} f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_h g(h,y)\, \partial_{yy} f\right.$ $\left.(t+h, g(h,y))\right) \left(\frac{1}{2} f(t+h, g(h,y)) + \frac{h}{2} \partial_t f(t+h, g(h,y))\right)$, $\partial_{hh} g(0,y) = \partial_t f(t,y) +$ $\frac{1}{2} f(t,y)\, \partial_y f(t,y) \Rightarrow \partial_{hh} \Phi(t,y,0) = \frac{1}{2} \partial_{tt} f(t,y) + f(t,y)\, \partial_{ty} f(t,y) + \frac{1}{2} f(t,y)^2\, \partial_{yy} f(t,y)$ $+ \frac{1}{2} \partial_y f(t,y) \left(\partial_t f(t,y) + f(t,y)\, \partial_y f(t,y)\right) \neq \frac{1}{3}\left[\partial_{tt} f(t,y) + \partial_t f(t,y)\, \partial_y f(t,y) + 2 f(t,y)\right.$ $\left.\partial_{ty} f(t,y) + f(t,y)\, \partial_y f(t,y)^2 + f(t,y)^2\, \partial_{yy} f(t,y)\right]$ (en général) $\Rightarrow$ La méthode de Crank-Nicholson est d'ordre égal à 2.

VIII 1.a. Il s'agit d'une méthode à un pas de type explicite pour la fonction : $\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$,

$\Phi(t,y,h) = \alpha f(t,y) + \beta f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \gamma f(t+h, y+h f(t,y))$.

b. Par récurrence sur $0 \leq n \leq N$.

2.a. Comme $\forall (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $\Phi(t,y,0) = (\alpha+\beta+\gamma) f(t,y)$, cette méthode est consistante ssi $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

b. Comme $\forall (t,y_1,y_2,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^3$, $|\Phi(t,y_1,h) - \Phi(t,y_2,h)| \leq K\alpha |y_1-y_2| + K\beta \left|y_1-y_2 + \frac{h}{2}\left[f(t,y_1) - f(t,y_2)\right]\right| + K\gamma |y_1-y_2 + h f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \left[K\alpha + K\beta\left(1+\frac{K|h|}{2}\right) + K\gamma(1 + K|h|)\right] |y_1-y_2|$, cette méthode est stable sous la condition $0 \leq h \leq h_{max}$, où h_{max} est un nombre positif fixé.

c. D'après les questions 2a et 2b, la méthode est convergente si $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $0 \leq h \leq h_{max}$.

3.a. D'après la question 2.a, cette méthode est d'ordre supérieur ou égal à 1 ssi $\alpha+\beta+\gamma = 1$; comme $\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $\partial_h \Phi(t,y,h) = \frac{\beta}{2} \partial_t f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \frac{\beta f(t,y)}{2} \partial_y f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \gamma \partial_t f(t+h, y+h f(t,y)) + \gamma f(t,y) \partial_y f(t+h, y+h f(t,y))$, $\partial_h \Phi(t,y,0) = \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right) \partial_t f(t,y) + \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right) \partial_y f(t,y) f(t,y) \Rightarrow$ cette méthode est d'ordre supérieur ou égal à 2 ssi $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\frac{\beta}{2}+\gamma = \frac{1}{2}$.

b. Comme $\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $\partial_{hh} \Phi(t,y,h) = \frac{\beta}{4} \partial_{tt} f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \frac{\beta}{2} f(t,y) \partial_{ty} f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \frac{\beta}{4} f(t,y)^2 \partial_{yy} f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(t,y)\right) + \gamma \partial_{tt} f(t+h, y+h f(t,y)) + 2\gamma \partial_{ty} f(t+h, y+h f(t,y)) f(t,y) + \gamma f(t,y)^2 \partial_{yy} f(t+h, y+h f(t,y))$, $\partial_{hh} \Phi(t,y,0) = \left(\gamma + \frac{\beta}{4}\right) \partial_{tt} f(t,y) + \left(\frac{\beta}{2} + 2\gamma\right) \partial_{ty} f(t,y) f(t,y) + \left(\gamma+\frac{\beta}{4}\right) f(t,y)^2 \partial_{yy} f(t,y) \neq \frac{1}{3}\left[\partial_{tt} f(t,y) + \partial_t f(t,y) \partial_y f(t,y) + 2 f(t,y) \partial_{ty} f(t,y) + f(t,y) \partial_y f(t,y)^2 + f(t,y)^2 \partial_{yy} f(t,y)\right]$ (en général) $\Rightarrow$ cette méthode n'est jamais d'ordre supérieur ou égal à 3.