GRAVEJAT Philippe

L3

15/09/22

TD N°3 : Calcul approché d'intégrales

I.1. $\sigma(1) = 2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx$; $\sigma(x) = 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx$; $\sigma(x^2) = \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$; $\sigma(x^3) = 0 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx$;

$\sigma(x^4) = \frac{1}{6} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4\,dx \Rightarrow$ L'ordre de σ est égal à 3.

2.a. $S(g) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left(2\, g\left(\frac{3x_i + x_{i+1}}{4}\right) - g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + 2 g\left(\frac{x_i + 3x_{i+1}}{4}\right)\right)$.

b. L'ordre de S est égal à 3.

II 1.a. Comme $\sigma(1) = b_1 + b_2$, $\sigma(x) = -b_1 + b_2 \xi$ et $\sigma(x^2) = b_1 + b_2 \xi^2$, la méthode σ est d'ordre supérieur ou égal à 2 ssi $b_1 + b_2 = 2$, $-b_1 + b_2 \xi = 0$ et $b_1 + b_2 \xi^2 = \frac{2}{3}$, soit ssi $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{3}{2}$ et $\xi = \frac{1}{3}$.

b. Comme $\sigma(x^3) = \frac{4}{9} \neq 0$, l'ordre de σ est égal à 2.

2. $\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{3} - y}{\frac{4}{3}}\,dy = \frac{1}{2} = b_1$ et $\int_{-1}^{1} \frac{y+1}{\frac{4}{3}}\,dy = \frac{3}{2} = b_2$.

III 1.a. Comme $\sigma(1) = 2$, $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(x^2) = \frac{4\xi^2}{3}$, la méthode σ est d'ordre supérieur ou égal à 2 ssi $\frac{4\xi^2}{3} = \frac{2}{3}$, soit ssi $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. Comme $\sigma(x^3) = 0$ et $\sigma(x^4) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$, l'ordre de σ est alors égal à 3.

c. $\forall y \in [-1, 1]$, $K_3(y) = \frac{(1-y)^4}{4} - \frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right)_+^3 + (-y)_+^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right)_+^3 \right]$.

2.a. $S(g) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left(g\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_i + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_{i+1}\right) + g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_i + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_{i+1}\right)\right)$.

b. $\forall y \in [a, b]$, $K_3(y) = \frac{1}{4}(b-y)^4 - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left[\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_i + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_{i+1} - y\right)_+^3 + \left(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) - y\right)_+^3 + \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_i + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_{i+1} - y\right)_+^3 \right]$.

IV 1.a. Comme $\sigma(1) = 2a + b$, $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(x^2) = 2a$, la méthode σ est d'ordre supérieur ou égal à 2 ssi $2a + b = 2$ et $2a = \frac{2}{3}$, soit ssi $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{4}{3}$.

b. Comme $\sigma(x^3) = 0$ et $\sigma(x^4) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$, l'ordre de σ est alors égal à 3.

2.a. $\forall y \in [-1, 1]$, $K_3(y) = \frac{1}{4}(1-y)^4 - \frac{1}{3}(1-y)^3 - \frac{1}{3}(-y)_+^3 = -\frac{1}{12}(1 - |y|)^3 (1 + 3|y|)$.

b. $E(f) = -\frac{1}{72} \int_{-1}^{1} (1 - |y|)^3 (1 + 3|y|)\, f^{(4)}(y)\,dy$.

V 1. Comme $\sigma(1)=b_0$, $\sigma(x)=-b_0+b_1+b_2$, $\sigma(x^2)=b_0-2b_1+2b_2\xi$ et $\sigma(x^3)=-b_0+3b_1+3b_2\xi^2$, la méthode σ est exacte pour les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ssi $b_0=2$, $-b_0+b_1+b_2=0$, $b_0-2b_1+2b_2\xi=\frac{2}{3}$ et $-b_0+3b_1+3b_2\xi^2=0$, soit ssi $b_0=2$, $b_1=\frac{2}{3}$, $b_2=\frac{4}{3}$ et $\xi=0$.

2.a. $\sigma(x^4)=-\frac{2}{3}$.

b. Comme $\sigma(x^4)\neq\frac{2}{5}$, la méthode σ est d'ordre égal à 3.

3.a. Par le théorème de Taylor avec reste intégral, $\forall x\in[-1,1]$, $f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}(x-y)_+^3 f^{(4)}(y)\,dy$; comme σ est d'ordre 3 et E est linéaire, $E(f)=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\,(x-y)_+^3 f^{(4)}(y)-\frac{1}{6}\Big(2\int_{-1}^{1}(-1-y)_+^3 f^{(4)}(y)\,dy+\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}dy\,(-1-y)_+^2 f^{(4)}(y)+\frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(-y)_+^2 f^{(4)}(y)\,dy\Big)$, d'où par le théorème de Fubini, $E(f)=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}K(y)f^{(4)}(y)\,dy$.

b. $\forall y\in[-1,1]$, $K(y)=\frac{(1-y)^4}{4}-\frac{8}{3}(-y)_+^2$.

4.a. $S(g)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\Big(g(x_i)+\frac{x_{i+1}-x_i}{6}g'(x_i)+\frac{x_{i+1}-x_i}{3}g'\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)\Big)$.

b. Soit $\forall\, 0\leq i\leq n-1$, $\forall x\in[-1,1]$, $f_i(x)=g\Big(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}+x\,\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\Big)$; $\mathcal{E}(g)=\int_a^b g(y)\,dy-S(g)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\Big[\int_{-1}^{1}f_i(x)\,dx-\sigma(f_i)\Big]=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{12}\int_{-1}^{1}K(x)f_i^{(4)}(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{96}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g^{(4)}(y)\,K\Big(\frac{2y-x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\Big)\,dy$.

VI 1. Comme $S_N(1)=1$ et $S_N(x)=\frac{N-1}{2N}\neq 0$, l'ordre de S_N est égal à 0.

2.a. C'est la formule de Taylor-Lagrange de f pour $a=\frac{k}{N}$.

b. Comme f est de classe C^p sur $[0,1]$, $\|f^{(p)}\|_\infty$ est bien défini ; sachant que $\forall\, 0\leq q\leq p-1$, $\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}\big(x-\frac{k}{N}\big)^q\,dx=\frac{1}{(q+1)N^{q+1}}$, $\Big|\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}f(x)\,dx-\sum_{q=0}^{p-1}\frac{f^{(q)}(\frac{k}{N})}{(q+1)!\,N^{q+1}}\Big|=\Big|\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}\frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}\big(x-\frac{k}{N}\big)^p\,dx\Big|\leq\frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{(p+1)!\,N^{p+1}}$.

c. Car $\Big|\int_0^1 f(x)\,dx-\sum_{q=0}^{p-1}\frac{S_N(f^{(q)})}{(q+1)!\,N^q}\Big|\leq\sum_{k=0}^{N-1}\Big|\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}f(x)\,dx-\sum_{q=0}^{p-1}\frac{f^{(q)}(\frac{k}{N})}{(q+1)!\,N^{q+1}}\Big|\leq\frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{(p+1)!\,N^p}$

d. Soit $\forall\, 1\leq q\leq p-1$, $\alpha_q^N=\frac{S_N(f^{(q)})}{(q+1)!}$; d'après la question 2.c, $S_N(f)=\int_0^1 f(x)\,dx-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\alpha_k^N}{N^k}+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N^p}\Big)$; pour $1\leq q\leq p-1$, en appliquant cette formule à $f^{(q)}$: $S_N(f^{(q)})=\int_0^1 f^{(q)}(x)\,dx-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{S_N(f^{(k+q)})}{(k+1)!\,N^k}+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N^p}\Big)\Rightarrow S_N(f^{(p-1)})=\int_0^1 f^{(p-1)}(x)\,dx+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N}\Big)$; vérifions alors, par récurrence sur $1\leq q\leq p-1$, qu'il existe des nombres (β_{p-q}^j) tels que : $S_N(f^{(p-q)})=\int_0^1 f^{(p-q)}(x)\,dx+\frac{\beta_{p-q}^1}{N}+\dots+\frac{\beta_{p-q}^{q-1}}{N^{q-1}}+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N^q}\Big)$; c'est vrai au rang $q=1$; supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $q-1$; au rang q, $S_N(f^{(p-q)})=\int_0^1 f^{(p-q)}(x)\,dx-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{S_N(f^{(k+p-q)})}{(k+1)!\,N^k}+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N^q}\Big)=\int_0^1 f^{(p-q)}(x)\,dx-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{N^k(k+1)!}\Big[\int_0^1 f^{(k+p-q)}(x)\,dx+\frac{\beta_{k+p-q}^1}{N}+\dots+\frac{\beta_{k+p-q}^{q-k-1}}{N^{q-k-1}}\Big]+O\Big(\frac{1}{N^q}\Big)=\int_0^1 f^{(p-q)}(x)\,dx+\frac{\beta_{p-q}^1}{N}+\dots+\frac{\beta_{p-q}^{q-1}}{N^{q-1}}+\underset{N\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{N^q}\Big)$

d'où la formule par récurrence sur $1 \leq q \leq p-1$; comme $\alpha_q^N = \frac{S_N(f^{(q)})}{(q+1)!} = \frac{1}{(q+1)!}\left\{\int_0^1 f^{(q)}(x)\,dx + \frac{B_q^1}{N} + \dots + \frac{B_q^{p-q-1}}{N^{p-q-1}} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^{p-q}}\right)\right.$, $\int_0^1 f(x)\,dx - S_N(f) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\alpha_q^N}{N^q} = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{(q+1)!}\left[\frac{1}{N^q}\int_0^1 f^{(q)}(x)\,dx + \frac{B_q^1}{N^{q+1}} + \dots + \frac{B_q^{p-1}}{N^{p-1}}\right] + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) = \sum_{q=1}^{p-1} \frac{a_q}{N^q} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$.

3.a. Comme $S_N(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=1}^{p-1} \frac{a_q}{N^q} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$, $U_N^1(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=1}^{p-1} a_q\left[\frac{2}{(2N)^q} - \frac{1}{N^q}\right] + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=2}^{p-1} a_q\left[\frac{2^{1-q}}{N^q} - \frac{1}{N^q}\right] + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$

b. Vérifions par récurrence sur $1 \leq k \leq p-2$ que : $U_N^k(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=k+1}^{p-1} \frac{a_q^k}{N^q} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$; cette formule est vraie au rang 1, et si elle est vraie jusqu'au rang k, alors au rang $k+1$, $U_N^{k+1}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=k+1}^{p-1} a_q^k \frac{2^{k+1}(2N)^{-q} - N^{-q}}{2^{k+1}-1} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{q=k+2}^{p-1} a_q^{k+1} N^{-q} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$, d'où la formule par récurrence sur $1 \leq k \leq p-2$; au rang $k = p-2$, $U_N^{p-2}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{a_{p-1}^{p-2}}{N^{p-1}} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right) \Rightarrow U_N^{p-1}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$; comme p est ici arbitraire, $\forall p \geq 1$, $\int_0^1 f(x)\,dx - U_N^p(f) = \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^{p+1}}\right)$.