GRAVEJAT Philippe

L3

08/09/11

TD N° 1 : Approximation polynomiale

I (i) $P_f = \left(\frac{1}{2e} - 1 + \frac{e}{2}\right) X^2 + \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right) X + 1.$

(ii) $P_g = -4X^2 + 4X$

(iii) $P_h = X$

II 1.a. $f[x_0] = 4$, $f[x_1] = 2$, $f[x_2] = \frac{1}{2}$, $f[x_3] = \frac{1}{4}$, $f[x_0, x_1] = -8$, $f[x_1, x_2] = -1$, $f[x_2, x_3] = -\frac{1}{8}$, $f[x_0, x_1, x_2] = 4$, $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{4}$, $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1$

b. $P_f = -X^3 + \frac{27}{4} X^2 - \frac{101}{8} X + \frac{27}{4}.$

2.a. $\ell_0(X) = -\frac{64}{105}\left(X^3 - \frac{13}{2}X^2 + 11X - 4\right)$, $\ell_1(X) = \frac{16}{21}\left(X^3 - \frac{25}{4}X^2 + \frac{19}{2}X - 2\right)$, $\ell_2(X) = -\frac{4}{21}\left(X^3 - \frac{19}{4}X^2 + \frac{25}{8}X - \frac{1}{2}\right)$ et $\ell_3(X) = \frac{4}{105}\left(X^3 - \frac{11}{4}X^2 + \frac{13}{8}X - \frac{1}{4}\right).$

b. $P_f = -X^3 + \frac{27}{4}X^2 - \frac{101}{8}X + \frac{27}{4}.$

III 1. Soit R le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme T_N ; $d^\circ(R) \leq d^\circ(T_N) - 1 = N$, et $P = Q\,T_N + R$ où $Q \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \forall\, 0 \leq i \leq N$, $P(x_i) = R(x_i)$, d'où par unicité : $R = P_N$.

2. Soit $\forall N \in \mathbb{N}$, $T_N = X(X-1)\dots(X-N)$; si $N=0$, alors : $P_0(f) = 1$; si $N=1$, alors : $X^3+1 = (X^2-X)(X+1) + X+1 \Rightarrow P_1(f) = X+1$; si $N=2$, alors : $X^3+1 = 1(X^3-3X^2+2X) + 3X^2-2X+1 \Rightarrow P_2(f) = 3X^2-2X+1$; si $N \geq 3$, alors : $P_N(f) = X^3+1$.

IV 1. Soit $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\Phi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$; Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$; $\forall P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, $X^2(X-1)^2 \mid P$ et $d^\circ(P) \leq 3 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \Phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathbb{R}^4$, d'où l'existence de P_f.

2.a. 0, avec multiplicité 2, et 1 avec multiplicité 2.

b. Comme $E(0) = E(x) = E(1) = 0$, par le théorème de Rolle, il existe $0 < a < x < b < 1$ tels que $E'(a) = E'(b) = 0 = E'(0) = E'(1)$; par le théorème de Rolle, E'' a trois zéros distincts, puis E''', deux, et enfin : $\exists\, 0 < \xi < 1$ tq. $E^{(4)}(\xi) = 0$.

c. Comme $E^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi)\pi(x) - 24\,R(x)$, il vient : $R(x) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi)\pi(x)$.

d. Sachant que $\forall\, 0 \leq x \leq 1$, $|x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$, il vient : $|\pi(x)| \leq \frac{1}{16}$.

e. D'après les questions c et d, $\forall h \in]0,1[$, $|R(h)| \leq \frac{1}{384} \|f^{(4)}\|_\infty$, d'où le résultat.

3.a. Par le théorème de Rolle.

b. Car $\forall\, 0 \leq x \leq 1$, $|x(x-1)(x-a)| \leq \frac{1}{4}|x-a| \leq \frac{1}{4}$.

c. Soit $\forall x \in [0,1]$, $\forall h \in]0,a[\cup]a,1[$, $G(x) = R'(x)\, h(h-1)(h-a) - R'(h)\, x(x-1)(x-a)$; G a quatre zéros distincts 0, a, h et 1, d'où par le théorème de Rolle, $\exists \xi \in]0,1[$ t.q. $G'''(\xi) = 0 \Rightarrow 6R'(h) = f^{(4)}(\xi)\, h(h-1)(h-a) \Rightarrow |R'(h)| \leq \frac{1}{24}\|f^{(4)}\|_\infty$.

V 1. $\| \ \|_1$ est bien définie de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$, avec $\forall g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\|g\|_1 = 0 \Rightarrow g = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda g\|_1 = |\lambda|\,\|g\|_1$ et $\forall h \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\|g+h\|_1 \leq \int_0^1 (|g| + |h|) \leq \|g\|_1 + \|h\|_1 \Rightarrow \| \ \|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

2.a. $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $\exists Q \in \mathbb{R}_N[X]$ t.q. $P = P_N + Q \Rightarrow \int_0^1 |f-P| = \int_0^1 |f - P_N - Q| \geq \int_0^1 \left| -\mathrm{sign}(f-P_N)\,Q + |f-P_N| \right| \geq \int_0^1 \left[|f-P_N| - \mathrm{sign}(f-P_N)\,Q \right] = \int_0^1 |f-P_N|$, car $\forall\, 0 \leq k \leq N$, $\int_0^1 x^k\, \mathrm{sign}(f-P_N)(x)\,dx = 0$

b. Comme $\forall\, 0 \leq \alpha \leq 1$, $\int_0^1 \mathrm{sign}(x^2-\alpha)\,dx = -\sqrt{\alpha} + 1 - \sqrt{\alpha} = 1 - 2\sqrt{\alpha}$, $\int_0^1 \mathrm{sign}(x^2 - \frac{1}{4})\,dx = 0 \overset{2.a.}{\Rightarrow} I = \int_0^1 |x^2 - \frac{1}{4}|\,dx = \frac{1}{4}$; cherchons $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\int_0^1 \mathrm{sign}(x^2 - \alpha x - \beta)\,dx = \int_0^1 x\,\mathrm{sign}(x^2 - \alpha x - \beta)\,dx = 0$; le polynôme $X^2 - \alpha X - \beta$ doit s'annuler au moins une fois sur $[0,1]$; s'il s'annule deux fois en r_- et r_+, alors : $\int_0^1 \mathrm{sign}(x^2-\alpha x-\beta)\,dx = 1 - 2(r_+ - r_-)$ et $\int_0^1 x\,\mathrm{sign}(x^2-\alpha x-\beta)\,dx = \frac{1}{2} - (r_+^2 - r_-^2)$; la condition est satisfaite ssi $r_+ - r_- = r_+^2 - r_-^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r_- = \frac{1}{4}$ et $r_+ = \frac{3}{4}$; dans ce cas, $X^2 - \alpha X - \beta = (X - \frac{1}{4})(X - \frac{3}{4}) = X^2 - X + \frac{3}{16} \Rightarrow \alpha = 1$ et $\beta = -\frac{3}{16}$, d'où : $J = \int_0^1 \left|(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})\right| dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (x^2 - x + \frac{3}{16})\,dx - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (x^2 - x + \frac{3}{16})\,dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 (x^2 - x + \frac{3}{16})\,dx = \frac{1}{16}$.

VI 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n] = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}\right) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-\cos^2(\theta))^p \cos(\theta)^{n-2p} \Rightarrow T_n(X) = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-X^2)^p X^{n-2p}$ convient ; si $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, alors $\tilde{T}_n - T_n$ s'annule sur $[-1,1] \Rightarrow \tilde{T}_n = T_n$, d'où l'unicité de T_n

2.a. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$

b. D'après 1 et 2.a, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos(\theta)) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\,T_n(\cos(\theta)) \Rightarrow T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$

c. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $d^\circ(T_n) = n$ et $T_n = 2^{n-1}X^n + \dots$, et $T_0 = 1$.

d. $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

3.a. Comme $\forall x \in]-1,1[$, $\left|\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq \frac{\|f\|_\infty \|g\|_\infty}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$, $\langle\, , \rangle$ est bien définie sur $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}^2)$; $\langle\, , \rangle$ est de plus bilinéaire et symétrique, avec : $\forall f \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \geq 0$, et $\langle f, f \rangle = 0$ ssi $f = 0$
$\Rightarrow \langle\, , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.

b. Si $m = n$, alors: $\int_0^\pi \cos(m\theta)^2\, d\theta = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2m\theta)}{2}\, d\theta = \pi$ si $m = 0$, $\frac{\pi}{2}$ si $m \neq 0$; si $m \neq n$, alors : $\int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)]\, d\theta = 0$.

c. $\forall m, n \geq 0$, $\langle T_m, T_n \rangle \overset{x = \cos(\theta)}{=} \int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)\, d\theta = 0$ si $m \neq n$, π si $m = 0$, $\frac{\pi}{2}$ si $m\ n \neq 0$
$\Rightarrow$ La famille $\left(\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n, \dots\right)$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\, , \rangle$.

4.a. $\forall p \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|f - p\|^2 = \|f - p_n(f)\|^2 + 2\langle f - p_n(f), p_n(f) - p\rangle + \|p_n(f) - p\|^2$; comme $\forall m \in \mathbb{N}$, $d^\circ(T_m) = m$, $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et comme $p_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $p_n(f) - p = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k \Rightarrow \langle f - p_n(f), p_n(f) - p\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle f - p_n(f), T_k \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k (\langle f, T_k\rangle - \langle f, T_k \rangle) = 0$, d'où l'identité.

b. D'après la question 4.a, $p_n(f)$ est un polynôme de meilleure approximation de f, et si p est aussi un polynôme de meilleure approximation de f, alors $\|p_n(f) - p\| = 0 \Rightarrow p = p_n(f)$, d'où l'unicité.

c. D'après la question 4.b, $p_3(f) = \frac{1}{\pi}\left(\langle f, T_0\rangle T_0 + 2\sum_{k=1}^{3} \langle f, T_k\rangle T_k\right)$, avec $\langle f, T_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, dx = 0$, $\langle f, T_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\cos(\pi x)\, dx = 0$, $\langle f, T_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (-1 + 2x^2)\cos(\pi x)\, dx = -\frac{8}{\pi^2}$ et $\langle f, T_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 3x)\cos(\pi x)\, dx = 0$, d'où : $p_3(f) = -\frac{16}{\pi^3} T_2$.