GRAVEJAT Philippe

L3

01/03/22

TD N° 1 : Calcul approché des zéros d'une fonction

I 1. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x(1+e^x) - e^x$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + x e^x \geq 0$ et $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, d'où l'existence et l'unicité de ℓ par le tableau de variations de g.

2.a. Par les opérations élémentaires, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+2e^x+(e^x)^2} \leq \frac{1}{4}$.

b. Par le théorème du point fixe et par unicité de ℓ.

II 1. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x - e^{-x}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + e^{-x} \geq 0$ et $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, d'où l'existence et l'unicité de ℓ par le tableau de variations de g.

2.a. Par récurrence sur $n \geq 3$, puisque $\forall x \geq 0$, $f(x) \in [0, 1]$ et $\forall\, 0 \leq x \leq 1$, $f(x) \in [e^{-1}, 1]$

b. Par les opérations élémentaires, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in [e^{-1}, 1]$, $|f'(x)| = |-e^{-x}| \leq \frac{1}{e^{e^{-1}}}$.

c. Par le théorème du point fixe et par unicité de ℓ.

3.a. Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -1 - e^{-x}$, les suites $(y_n)_{n \geq 0}$ sont bien définies par : $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n + \frac{e^{-y_n} - y_n}{1+e^{-y_n}} = \frac{e^{-y_n}(1+y_n)}{1+e^{-y_n}}$.

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

c. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$; m est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $m'(x) = \frac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2}$, d'où d'après le tableau de variations de m, $m(\mathbb{R}) \subset]-\infty, \ell]$; comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} - y_n = -\frac{g(y_n)}{1+e^{-y_n}}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ est croissante, donc convergente de limite ℓ ; comme $m'(\ell) = 0$, la vitesse de convergence est au moins quadratique.

III 1.a. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$.

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

2.a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \overset{1.b.}{\Longrightarrow} |x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}|^2$.

b. Comme $1 \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$, $|x_0 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}$, puis par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

c. Au rang $n \in \mathbb{N}$, la formule de la question 2b garantit la connaissance de k_n décimales du nombre $\sqrt{2}$, dès que $\frac{1}{2^{2^n}} \leq 10^{-k_n}$, soit $k_n \leq 2^n \frac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

IV 1. Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*$, avec $\forall x \in \mathbb{R}_*$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - a\right) = 2x_n - a x_n^2$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

3. Lorsque $x_0 < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < 0$ et $x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$; pour $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; pour $x_0 = \frac{2}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{2}{a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{a}$; lorsque $x_0 > \frac{2}{a}$, $x_1 < 0 \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$; lorsque $0 < x_0 < \frac{2}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n < \frac{1}{a}$ et $x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $\frac{1}{a}$.

V 1.a. Comme $|f'(b)| \geq \frac{1}{\lambda} > 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - a = x_n - a - \frac{f(x_n) - f(a)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{f'(b)}$.

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$; $|x_0 - a| = 0 \leq \rho$; si $x_n = a$, alors $|x_{n+1} - a| = \frac{|f(a)|}{|f'(b)|} \leq \frac{\rho}{2} \leq \rho$; si $x_n \neq a$, alors $x_n - a - \frac{f(x_n) - f(a)}{f'(b)} = \frac{x_n - a}{f'(b)}\left(f'(b) - \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) = \frac{x_n - a}{f'(b)}\int_0^1 (f'(b) - f'(a + t(x_n - a)))\,dt \Rightarrow \left|x_n - a - \frac{f(x_n) - f(a)}{f'(b)}\right| \leq \frac{1}{2}|x_n - a| \leq \frac{\rho}{2}$, car $|x_n - a| \leq \rho$ par l'hypothèse de récurrence ; comme $\frac{|f(a)|}{|f'(b)|} \leq \frac{\rho}{2}$, $|x_{n+1} - a| \leq \rho$.

2.a. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $|x_0 - \ell| = |\mu - \ell| \leq \frac{\rho}{2^0}$; si $x_n = \ell$, alors $|x_{n+1} - \ell| = \left|\frac{f(\ell)}{f'(b)}\right| = 0$; si $x_n \neq \ell$, alors $x_{n+1} - \ell = x_n - \ell - \frac{f(x_n) - f(\ell)}{f'(b)} = (x_n - \ell)\left(1 - \frac{f(x_n) - f(\ell)}{f'(b)(x_n - \ell)}\right) = (x_n - \ell)\frac{1}{f'(b)}\int_0^1 (f'(b) - f'(\ell + t(x_n - \ell)))\,dt$; comme $|x_n - a| \leq \rho$ et $|\ell - a| \leq \rho$, $\forall t \in [0,1]$, $|\ell + t(x_n - \ell) - a| \leq \rho \Rightarrow |x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|x_n - \ell| \leq \frac{\rho}{2^{n+1}}$.

b. D'après la question 2.a, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et la vitesse de convergence est au moins géométrique.

VI 1. Comme $q_1 < 1$, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = x_n - \ell - v_2 q_2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{\varepsilon_{n+1} + \ell + v_2 q_2^{n+1} - q_1(\varepsilon_n + \ell + v_2 q_2^n)}{1 - q_1} = \ell + \frac{\varepsilon_{n+1} - q_1\varepsilon_n}{1 - q_1} \Rightarrow |y_n - \ell| \leq \frac{|\varepsilon_{n+1}| + q_1|\varepsilon_n|}{1 - q_1} \leq V_2 q_2^n$, où : $V_2 = \frac{q_2 + q_1}{1 - q_1}$.

VII 1.a. Comme $\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$, $c_{n+1} \geq 0$ et $s_{n+1} \geq 0$; sachant que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$, $\forall n \geq 0$, $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}$ et $s_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - c_n}{2}}$.

b. Sachant que $c_0 = -1$ et $s_0 = 0$, nous pouvons utiliser la méthode de Héron pour calculer les racines carrées de la question 1.a : cette méthode correspond à celle de Newton pour la fonction $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \alpha$, soit à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n}$.

2.a. Car $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$

b. Par la méthode de Richardson de l'exercice VI, il suffit de poser : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{2^{n+3}s_{n+1} - 2^n s_n}{4}$.