CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède un point fixe attractif en un point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad |f'(a)| < 1.$$

2. Étant donnée une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}_+^*)$, il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
— $\forall n \geq 0$, $d^\circ(P_n) = n$.
— $\forall n \geq 0$, P_n est unitaire.
— $\forall m \neq n$, $\langle P_m, P_n \rangle = 0$.
Les polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ sont les polynômes orthogonaux relatifs au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, la méthode de quadrature élémentaire σ associée à des points deux à deux distincts ξ_0, ..., ξ_N de $[-1,1]$ est définie par

$$\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, g(\xi_j),$$

où

$$\forall 0 \leq j \leq N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{k\neq j} \Big(\frac{y - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \Big) \, dy.$$

4. La fonction `Rectangle` peut être définie de la façon suivante :

```
def Rectangle(f, L) :
    S = 0
    for i in range(0, len(L) - 1) :
        S = S + (L[i + 1] - L[i])*f(L[i])
    return S
```

5. La fonction `Euler` peut être définie de la façon suivante :

```
def Euler(f, y0, L) :
    Y = [y0]
    for i in range(0, len(L) - 1) :
        Y.append(Y[- 1] + (L[i + 1] - L[i])*f(L[i], Y[- 1]))
    return Y
```

Exercice 1.

1. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction f est elle-aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est égale à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2 + \cos(x).$$

Sachant que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1,$$

nous observons que

$$f'(x) \geq 1 > 0,$$

de sorte que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En parallèle, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x) \leq 1,$$

d'où nous déduisons que

$$2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 2.$$

Comme

$$2x - 2 \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty, \quad \text{et} \quad 2x + 2 \underset{x \to -\infty}{\to} -\infty,$$

nous obtenons

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} -\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f possède donc au moins un zéro $\alpha \in \mathbb{R}$, et par stricte croissance de cette fonction, ce zéro est unique.

2. Rappelons que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est formellement définie par la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n + \sin(x_n) - 1}{2 + \cos(x_n)} = \frac{x_n \cos(x_n) - \sin(x_n) + 1}{2 + \cos(x_n)}.$$

Nous avons vérifié à la question 1. que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2 + \cos(x) > 0,$$

de sorte que la fonction $x \mapsto x - f(x)/f'(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Quelle que soit la valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est donc bien définie par récurrence sur $n \geq 0$.

3.a. Rappelons que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est donnée par la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Comme α est un zéro de la fonction f, nous pouvons écrire cette expression sous la forme

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_n)} = \frac{f(\alpha) - f(x_n) - (\alpha - x_n) f'(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Par le théorème de Taylor-Lagrange, il existe alors un nombre $y_n \in [\alpha, x_n]$ tel que

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n) f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} f''(y_n),$$

et nous aboutissons à

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(y_n)}{2 f'(x_n)} \big(x_n - \alpha\big)^2.$$

b. Nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1,$$

et

$$\big|f''(x)\big| = \big|-\sin(x)\big| \leq 1,$$

ce qui assure que

$$\forall n \geq 0,\ \Big|\frac{f''(y_n)}{2f'(x_n)}\Big| \leq \frac{1}{2}.$$

Nous déduisons donc de la formule de la question 3.a que

$$\big|x_{n+1} - \alpha\big| \leq \frac{1}{2}\big|x_n - \alpha\big|^2.$$

c. Considérons la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ t_n = \Big|\frac{x_n - \alpha}{2}\Big|.$$

Il résulte de la question 3.b que

$$\forall n \geq 0,\ t_{n+1} \leq t_n^2,$$

et nous pouvons montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 0,\ t_n \leq t_0^{2^n}.$$

Cette formule est en effet vraie au rang $n = 0$, et si elle est vraie jusqu'au rang n, alors au rang $n + 1$,

$$t_{n+1} \leq t_n^2 \leq \big(t_0^{2^n}\big)^2 = t_0^{2^{n+1}},$$

ce qui conclut la preuve de la récurrence. Nous obtenons donc

$$\forall n \geq 0,\ \Big|\frac{x_n - \alpha}{2}\Big| \leq \Big|\frac{x_0 - \alpha}{2}\Big|^{2^n},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\big|x_n - \alpha\big| \leq 2\Big|\frac{x_0 - \alpha}{2}\Big|^{2^n}.$$

d. Lorsque $|x_0 - \alpha| < 2$, nous savons que

$$\Big|\frac{x_0 - \alpha}{2}\Big| < 1,$$

ce qui assure que

$$\Big|\frac{x_0 - \alpha}{2}\Big|^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme la suite $(2^n)_{n\geq 0}$ forme une extraction de la suite $(n)_{n\geq 0}$, nous obtenons

$$\Big|\frac{x_0 - \alpha}{2}\Big|^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

et il résulte de la question 3.c que

$$\big|x_n - \alpha\big| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc convergente de limite α.

Exercice 2.

1.a. Considérons les fonctions polynômes X_k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_0) = 2\lambda + \mu, \quad \sigma(X_1) = \mu\xi, \quad \text{ et } \quad \sigma(X_2) = 2\lambda + \mu\xi^2.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \text{ et } \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature σ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 2, \\ \mu\xi = 0, \\ 2\lambda + \mu\xi^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

La deuxième équation de ce système assure que seulement deux cas peuvent se produire. Si $\mu = 0$, alors, $\lambda = 1$ par la première équation auquel cas la dernière équation s'écrit

$$2 = \frac{2}{3},$$

ce qui est absurde. Sinon, $\xi = 0$, auquel cas $\lambda = 1/3$ par la troisième équation, et $\mu = 4/3$ par la première. Ce système possède donc une unique solution égale à

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{4}{3}, \quad \text{ et } \quad \xi = 0.$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{1}{3}\big(g(-1) + 4g(0) + g(1)\big),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

b. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \frac{1}{3}\big(-1 + 1\big) = 0.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

nous déduisons de la question 1.a que la méthode de quadrature élémentaire σ est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Nous avons également

$$\sigma(X_4) = \frac{1}{3}\big(1 + 1\big) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4\,dx,$$

de sorte qu'il existe un polynôme X^4 de degré égal à 4 pour lequel cette méthode n'est pas exacte. En définitive, cette méthode est donc d'ordre égal à 3.

2.a. Pour $y \in [-1,1]$, posons

$$\forall x \in [-1,1],\ g_y(x) = \big(x - y\big)_+^3.$$

Par définition, le noyau de Peano K de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1,1],\ K(y) = \int_{-1}^{1} g_y(x)\, dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} g_y(x)\, dx = \int_{y}^{1} \big(x-y\big)^3\, dx = \Big[\frac{(x-y)^4}{4}\Big]_y^1 = \frac{(1-y)^4}{4},$$

et que

$$\sigma(g_y) = \frac{1}{3}\big(g_y(-1) + 4 g_y(0) + g_y(1)\big) = \frac{1}{3}\big(4(-y)_+^3 + (1-y)^3\big),$$

nous obtenons

$$K(y) = \frac{(1-y)^4}{4} - \frac{4}{3}(-y)_+^3 - \frac{1}{3}(1-y)^3.$$

Nous vérifions alors que

$$y = y_+ - y_-, \qquad \text{et} \qquad |y| = y_+ + y_-,$$

de sorte que

$$(-y)_+ = y_- = \frac{1}{2}\big(|y| - y\big).$$

Nous déduisons de cette formule que

$$\begin{aligned} K(y) &= -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{3}|y|^3 \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{2}{3}|y|^3 + \frac{1}{4}|y|^4 = -\frac{1}{12}\big(1+3|y|\big)\big(1-|y|\big)^3. \end{aligned}$$

b. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, considérons l'erreur

$$E(g) = \int_{-1}^{1} g(y)\, dy - \sigma(g),$$

associée à la méthode de quadrature élémentaire σ. Lorsque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur le segment $[-1,1]$, cette erreur s'exprime en fonction du noyau de Peano K sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} K(y)\, g^{(4)}(y)\, dy.$$

D'après la question 2.a, elle vaut donc

$$E(g) = -\frac{1}{72}\int_{-1}^{1} \big(1+3|y|\big)\big(1-|y|\big)^3 g^{(4)}(y)\, dy.$$

Exercice 3.

1. Introduisons la fonction

$$\forall (t,y,h) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2,\ \Phi(t,y,h) = f\big(t+h, y+hf(t,y)\big).$$

La fonction Φ est bien définie et continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \le n \le N-1,\ y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suit le schéma numérique considérée. Cette méthode numérique est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R},\ \Phi(t,y,0)=f\big(t+0,y+0f(t,y)\big)=f(t,y),$$

ce qui assure la consistance de la méthode numérique.

b. Pour $t\in[0,T]$, $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ et $h\in\mathbb{R}$ fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction f que

$$\begin{aligned}\big|\Phi(t,y_2,h)-\Phi(t,y_1,h)\big| &\leq\big|f\big(t+h,y_2+hf(t,y_2)\big)-f\big(t+h,y_1+hf(t,y_1)\big)\big|\\ &\leq C\big|y_2+hf(t,y_2)-y_1-hf(t,y_1)\big|.\end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$\big|y_2+hf(t,y_2)-y_1-hf(t,y_1)\big|\leq\big|y_2-y_1\big|+|h|\big|f(t,y_2)-f(t,y_1)\big|\leq\big(1+C|h|\big)\big|y_2-y_1\big|,$$

d'où l'inégalité

$$\big|\Phi(t,y_2,h)-\Phi(t,y_1,h)\big|\leq C\big(1+C|h|\big)\big|y_2-y_1\big|.$$

Sous la condition $|h|\leq 1$,[1] la fonction Φ est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit la stabilité de la méthode numérique.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode numérique est consistante et stable sous la condition $|h|\leq 1$. Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous cette condition.

3. Lorsque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, la fonction Φ définie à la question 1. est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^2$. De plus, elle satisfait

$$\partial_h\Phi(t,y,h)=\partial_t f\big(t+h,y+hf(t,y)\big)+f(t,y)\,\partial_y f\big(t+h,y+hf(t,y)\big),$$

pour tout $(t,y,h)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2$. Rappelons alors que les fonctions $f^{[0]}$ et $f^{[1]}$ sont données par les formules

$$f^{[0]}(t,y)=f(t,y),\qquad\text{et}\qquad f^{[1]}(t,y)=\partial_t f(t,y)+f(t,y)\,\partial_y f(t,y).$$

Nous obtenons donc

$$\Phi(t,y,0)=f(t,y)=\frac{1}{1}f^{[0]}(t,y),$$

et

$$\partial_h\Phi(t,y,0)=\partial_t f(t,y)+f(t,y)\,\partial_y f(t,y)\neq\frac{1}{2}f^{[1]}(t,y),$$

pour une fonction f arbitraire. En général, la méthode numérique est donc d'ordre 1.

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme $|h|<h_0$, où h_0 est un nombre réel strictement positif fixé.