CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Corrigé du devoir surveillé N°2

Questions de cours.

1.a. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. La formule de la méthode de quadrature composée Σ des rectangles à gauche pour la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq M}$ du segment $[a,b]$ s'écrit

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \big(x_{i+1} - x_i\big) f(x_i).$$

b. La méthode de quadrature composée des rectangles à gauche est d'ordre zéro.

2.a. Étant donnée une solution $y \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T],\, y'(t) = f(t, y(t)),$$

considérons les erreurs de consistance $(e_n)_{0\leq n\leq N-1}$ définies par

$$e_n(y) = y\big(t_{n+1}\big) - y\big(t_n\big) - h_n\phi\big(t_n, y(t_n), h_n\big),$$

et notons

$$h_{\max} = \max_{0\leq n\leq N-1} |h_n|,$$

le pas maximal de la subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. La méthode numérique à un pas est consistante si et seulement si, quelle que soit la solution $y \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ de l'équation différentielle considérée,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \big|e_n(y)\big| \underset{h_{\max}\to 0}{\to} 0.$$

b. Lorsque la fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est globalement Lipschitzienne en sa seconde variable, la méthode numérique à un pas associée à la fonction $\phi \in \mathcal{C}^0([0,T]\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est consistante si et seulement si

$$\forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R},\, \phi(t,y,0) = f(t,y).$$

Exercice 1.

1. Par définition, nous calculons

$$\ell_0(X) = \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} = -\frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{12}X - \frac{1}{6},$$

$$\ell_1(X) = \frac{(X+2)(X-1)(X-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{6}X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{3},$$

$$\ell_2(X) = \frac{(X+2)(X+1)(X-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{6}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{2}{3},$$

et

$$\ell_3(X) = \frac{(X+2)(X+1)(X-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} = \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{12}X - \frac{1}{6}.$$

2. Le polynôme d'interpolation de Lagrange P de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 est donné par la formule

$$P(X) = f(x_0)\,\ell_0(X) + f(x_1)\,\ell_1(X) + f(x_2)\,\ell_2(X) + f(x_3)\,\ell_3(X).$$

Sachant que

$$f(x_0) = f(x_3) = \frac{1}{5}, \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2},$$

nous vérifions que

$$P(X) = -\frac{1}{10}X^2 + \frac{3}{5}.$$

Exercice 2.

1.a. Considérons les fonctions polynômes X_k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_0) = \alpha + \beta, \quad \sigma(X_1) = -\frac{\alpha}{3} + \beta\xi, \quad \text{et} \quad \sigma(X_2) = \frac{\alpha}{9} + \beta\xi^2.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature σ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\frac{\alpha}{3} + \beta\xi = 0, \\ \frac{\alpha}{9} + \beta\xi^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} \beta(3\xi + 1) = 2, \\ \alpha = 3\beta\xi, \\ \beta\xi(3\xi + 1) = 2, \end{cases}$$

puis, comme $\xi \neq -1/3$, à

$$\begin{cases} \beta(3\xi + 1) = 2, \\ \alpha = 3\beta\xi, \\ \xi = 1. \end{cases}$$

Son unique solution est donc égale à

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \xi = 1.$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{3}{2}\,g\Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\,g(1),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

b. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

il existe un polynôme de degré égal à 3 pour lequel la méthode de quadrature élémentaire σ n'est pas exacte. Cette méthode est donc d'ordre égal à 2.

c. Sachant que $\xi = 1$, nous calculons

$$3\int_{-1}^{1} \frac{\xi - y}{3\xi + 1}\,dy = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (1-y)\,dy = \frac{3}{4}\Big[y - \frac{y^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{3}{2} = \alpha,$$

tandis que

$$\int_{-1}^{1} \frac{3y+1}{3\xi+1}\,dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (3y+1)\,dy = \frac{1}{4}\Big[\frac{3y^2}{2} + y\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} = \beta.$$

2.a. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, la méthode de quadrature composée Σ est donnée par la formule

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\,\Big(\frac{3}{2} f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{6}\Big) + \frac{1}{2} f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\Big)\Big),$$

soit

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{4}\,\Big(3f\Big(\frac{2x_i + x_{i+1}}{3}\Big) + f(x_{i+1})\Big).$$

b. L'ordre de la méthode de quadrature composée Σ est identique à celui de la méthode de quadrature élémentaire σ, soit égal à 2.

3.a. Pour $y \in [-1,1]$, posons

$$\forall x \in [-1,1],\ g_y(x) = \big(x - y\big)_+^2.$$

Par définition, le noyau de Peano K_2 de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1,1],\ K_2(y) = \int_{-1}^{1} g_y(x)\,dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^{1} g_y(x)\,dx = \int_{y}^{1} \big(x-y\big)^2\,dx = \Big[\frac{(x-y)^3}{3}\Big]_{y}^{1} = \frac{(1-y)^3}{3},$$

et que

$$\begin{aligned}\sigma(g_y) = \frac{3}{2}\,g_y\Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\,g_y(1) &= \frac{3}{2}\,\Big(-\frac{1}{3} - y\Big)_+^2 + \frac{1}{2}\,\big(1-y\big)_+^2 \\ &= \frac{1}{6}\,\big(-3y-1\big)_+^2 + \frac{1}{2}\,\big(1-y\big)^2,\end{aligned}$$

nous obtenons

$$K_2(y) = \frac{(1-y)^3}{3} - \frac{1}{6}\big(-3y-1\big)_+^2 - \frac{1}{2}\big(1-y\big)^2 = -\frac{1}{6}\Big((1-y)^2(2y+1) + (-3y-1)_+^2\Big).$$

b. Lorsque $-1 \le y \le 1$, nous savons que

$$(1-y)^2 \le 4, \quad |2y+1| \le 3, \quad \text{et} \quad |-3y-1|^2 \le 16,$$

de sorte que

$$\Big|(1-y)^2(2y+1) + (-3y-1)_+^2\Big| \le 28.$$

D'après la question 3.a, nous obtenons

$$\big|K_2(y)\big| \le \frac{14}{3}.$$

c. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^3([-1,1],\mathbb{R})$, l'erreur $E(g)$ s'exprime en fonction du noyau de Peano K_2 sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K_2(y)\, g'''(y)\, dy.$$

D'après la question 3.b, nous avons donc

$$\big|E(g)\big| \le \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \big|K_2(y)\big|\, \big|g'''(y)\big|\, dy \le \frac{7}{3}\int_{-1}^{1} \big|g'''(y)\big|\, dy.$$