Corrigé du devoir surveillé N°1

Questions de cours.

1. Étant donnée une fonction $F \in \mathcal{C}^0([x_0, y_0], \mathbb{R})$ telle que

$$F(x_0) < 0 < F(y_0),$$

la méthode de la dichotomie est définie via les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ données par les formules de récurrence

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = y_n, & \text{si } F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) < 0, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{si } F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) = 0, \\ x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{si } F\Big(\frac{x_n+y_n}{2}\Big) > 0. \end{cases}$$

2. Soit $0 \leq j \leq N$. Le polynôme de base de Lagrange $\ell_j(X)$ associé aux points x_0, …, et x_N est donné par la formule

$$\ell_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{N} \Big(\frac{X - x_i}{x_j - x_i}\Big).$$

3. Un polynôme de meilleure approximation d'ordre $N \geq 0$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour une norme $\| \cdot \|$ de cet espace est un polynôme P_N de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que

$$\big\|f - P_N\big\| = \min_{P\in\mathbb{R}_N[X]} \big\|f - P\big\|.$$

Exercice 1.

1. Par définition, nous calculons

$$f[x_0] = f(0) = 1, \quad f[x_1] = f\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0, \quad f[x_2] = f(1) = -1, \quad \text{et} \quad f[x_3] = f\Big(\frac{3}{2}\Big) = 0,$$

puis,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = -2, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = -2,$$

ensuite,

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = 2, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 0,$$

et enfin,

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 4, \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{8}{3}.$$

2. Par la formule de Newton, nous savons que

$$\begin{aligned} P(X) =& f[x_0, x_1, x_2, x_3](X - x_0)(X - x_1)(X - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](X - x_0)(X - x_1) \\ &+ f[x_0, x_1](X - x_0) + f[x_0], \end{aligned}$$

d'où par la question 1.,

$$P(X) = \frac{8}{3}\Big(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\Big) - 2X + 1,$$

ce qui assure que

$$a = \frac{8}{3}, \quad b = -4, \quad c = -\frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad d = 1.$$

Exercice 2.

1.a. Soit $n \geq 1$. Nous savons que

$$\forall 2 \leq k \leq n,\ k \geq 2,$$

de sorte que

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n \geq 1 \times 2^{n-1},$$

soit

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

b. Par définition de la fonction exponentielle, nous savons que

$$\forall x \in [0,2[,\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

d'où par l'inégalité de la question 1.a,

$$e^x \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}.$$

Le changement d'indices $k = n-1$ assure alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{x}{2}\Big)^k.$$

Comme $0 \leq x/2 < 1$, la somme de cette série géométrique vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{x}{2}\Big)^k = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}},$$

d'où l'inégalité

$$\forall x \in [0,2[,\ e^x \leq 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2}}.$$

c. Pour $x = 1$, l'inégalité de la question 1.b conduit à la formule

$$e^1 \leq 3 < 4,$$

et il suffit alors d'utiliser la croissance de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$ pour obtenir

$$1 < \ln(4) = 2\ln(2).$$

2.a. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = e^{(-x)^2} - 4(-x)^2 = e^{x^2} - 4x^2 = f(x),$$

puisque $(-x)^2 = x^2$. Aussi la fonction f est-elle paire sur $\mathbb{R}$.

b. La dérivée de la fonction f vaut

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x\big(e^{x^2} - 4\big).$$

Pour $m > 0$, cette dérivée s'annule si et seulement si

$$e^{m^2} = 4,$$

soit si et seulement

$$m = \sqrt{\ln(4)} = \sqrt{2\ln(2)}.$$

Ce nombre est donc l'unique nombre $m > 0$ tel que $f'(m) = 0$.

c. Nous déduisons du calcul précédent de la dérivée de la fonction f le tableau de variations pour cette fonction sur $[0, +\infty[$:

x	0		1		m		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^1 - 4$	$\searrow$	$4 - 8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = e^1 - 4 < 0, \quad f(m) = 4\big(1 - 2\ln(2)\big) < 0, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,$$

nous déduisons de ce tableau de variations que la fonction f possède exactement deux zéros z_1 et z_2 dans $[0, +\infty[$ qui satisfont

$$0 < z_1 < 1 < z_2.$$

d. Soit $y \in]-\infty, 0]$. Par parité, la fonction f s'annule en y si et seulement si elle s'annule en $-y$, soit d'après la question 2.c, si et seulement si $y = -z_1$ ou $y = -z_2$. La fonction f possède donc exactement quatre zéros réels $-z_2$, $-z_1$, z_1 et z_2.

3.a. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par positivité de la fonction exponentielle, elle satisfait de plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0.$$

Lorsque $0 \leq x \leq 1$, la croissance de la fonction carrée et celle de la fonction exponentielle assure que

$$g(x) \leq g(1) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

Par la question 1.c, nous savons que $e^1 < 4$, de sorte que

$$e^{\frac{1}{2}} < 2,$$

puis

$$g(x) \leq 1.$$

La fonction g est donc définie de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.

Enfin nous calculons

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{2}},$$

d'où les inégalités

$$0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, la fonction g est alors K-lipschitzienne sur $[0,1]$ pour une constante $K = e^{1/2}/2 < 1$. En définitive il s'agit d'une contraction de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

b. Soit $x_0 \in [0,1]$. D'après la question 3.a, la fonction g est une contraction du segment (fermé donc complet) $[0,1]$ sur $[0,1]$. Par le théorème du point fixe, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc bien définie et convergente de limite x_∞, l'unique point fixe de la fonction g dans le segment $[0,1]$. Nous vérifions alors que

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = x \Longleftrightarrow 2x = e^{\frac{x^2}{2}} \Longleftrightarrow 4x^2 = e^{x^2}.$$

L'unique point fixe x_∞ de la fonction g dans le segment $[0,1]$ est donc l'unique zéro de la fonction f dans $[0,1]$, soit le nombre z_1, et nous concluons que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} z_1.$$

4. Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction h est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$, puisque

$$\forall x \geq 1,\ 2\ln(2) + 2\ln(x) \geq 2\ln(2) > 0.$$

Nous déduisons de plus de la question 1.c que

$$\forall x \geq 1,\ \sqrt{2\ln(2) + 2\ln(x)} \geq \sqrt{2\ln(2)} \geq \sqrt{1} = 1,$$

de sorte que la fonction h est à valeurs dans $[1,+\infty[$.

Nous calculons par ailleurs

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ h'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\ln(2) + 2\ln(x)}},$$

ce qui assure que

$$0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\ln(2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\ln(2)}}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, la fonction h est donc L-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$ pour un nombre $L = 1/\sqrt{2\ln(2)} < 1$, d'après la question 1.c.

Par conséquent, la fonction h est une contraction de l'intervalle fermé (donc complet) $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$, et le théorème du point fixe assure que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est bien définie quel que soit le nombre $y_0 \in [1,+\infty[$, et qu'elle converge vers l'unique point fixe y_∞ de la fonction h dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Nous vérifions alors que

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ h(x) = x \Longleftrightarrow x^2 = \ln(4x^2) \Longleftrightarrow e^{x^2} = 4x^2.$$

L'unique point fixe y_∞ de la fonction h dans l'intervalle $[1,+\infty[$ est donc l'unique zéro de la fonction f dans cet intervalle, soit le nombre z_2, et nous concluons que

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} z_2.$$