Corrigé de l'étude mathématique du devoir à la maison N°2

1. Considérons deux polynômes réels $P(X)$ et $Q(X)$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$, et tels que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P(x_i) = f(x_i) = Q(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i) = Q'(x_i).$$

Chacun des nombres $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ est alors une racine d'ordre au moins égal à 2 du polynôme $Q(X) - P(X)$. Comme les nombres $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ sont deux à deux distincts, ce polynôme possède au moins $2N+2$ racines comptées avec multiplicité. Sachant que ce polynôme est de degré au plus $2N+1$, il ne peut s'agir que du polynôme nul, et nous concluons que $Q(X) = P(X)$, soit qu'il existe au plus un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2N+1$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\, P(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

2.a. La formule pour le polynôme de base $\ell_i(X)$ assure que

$$\ell_i(x_i) = 1, \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\, \ell_i(x_j) = 0.$$

Il résulte aussi de cette formule que le polynôme dérivé $\ell_i'(X)$ est égal à

$$\ell_i'(X) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{k \neq i,j} \Big(\frac{X - x_k}{x_i - x_k} \Big).$$

D'où l'expression

$$\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{k \neq i,j} \Big(\frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} \Big) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Sachant que $P_i(X) = \ell_i(X)^2$, nous déduisons d'abord de ces formules que

$$P_i(x_i) = \ell_i(x_i)^2 = 1, \quad \text{et} \quad P_i(x_j) = \ell_i(x_j)^2 = 0,$$

pour $j \neq i$, puis

$$P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i)\ell_i(x_i) = 2\ell_i'(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}, \quad \text{et} \quad P_i'(x_j) = 2\ell_i'(x_j)\ell_i(x_j) = 0,$$

lorsque $j \neq i$.

b. Sachant que

$$Q_i'(X) = a_i\, P_i(X) + (a_i X + b_i)\, P_i'(X),$$

nous déduisons des formules de la question 2.a que les équations $Q_i(x_i) = f(x_i)$ et $Q_i'(x_i) = f'(x_i)$ sont équivalentes au système

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = f(x_i), \\ a_i + (a_i x_i + b_i)\, P_i'(x_i) = f'(x_i), \end{cases}$$

soit aux valeurs

$$\begin{cases} a_i = f'(x_i) - f(x_i)P_i'(x_i), \\ b_i = f(x_i) - x_i\big(f'(x_i) - f(x_i)P_i'(x_i)\big). \end{cases}$$

En particulier, ces valeurs donnent l'expression de l'unique couple (a_i, b_i) pour lequel le polynôme $Q_i(X)$ satisfait aux équations

$$Q_i(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = f'(x_i).$$

c. Nous considérons le polynôme

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} (a_i X + b_i)\, P_i(X),$$

où les nombres réels a_i et b_i sont choisis de façon à satisfaire les équations de la question 2.b. Comme les polynômes $P_i(X)$ sont de degré $2N$, les polynômes $Q_i(X) = (a_i X + b_i)\, P_i(X)$ sont de degré $2N+1$, de sorte que le polynôme $H_f(X)$ est de degré au plus $2N+1$.

De plus, nous déduisons des questions 2.a et 2.b que

$$H_f(x_i) = \sum_{j=0}^{N} (a_j x_i + b_j)\, P_j(x_i) = (a_i x_i + b_i)\, P_i(x_i) = Q_i(x_i) = f(x_i),$$

et

$$\begin{aligned} H_f'(x_i) &= \sum_{j=0}^{N} \Big(a_j\, P_j(x_i) + (a_j x_i + b_j)\, P_j'(x_i)\Big) \\ &= a_i\, P_i(x_i) + (a_i x_i + b_i)\, P_i'(x_i) = Q_i'(x_i) = f'(x_i), \end{aligned}$$

de sorte que $H_f(X)$ est un polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f aux points $x_0, \ldots, x_N$. Par la question 1., ce polynôme est unique, d'où son existence et son unicité.

d. Les formules des questions 2.b et 2.c assurent que

$$\begin{aligned} H_f(X) &= \sum_{i=0}^{N} (a_i X + b_i)\, P_i(X) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \Big(\big(f'(x_i) - f(x_i)P_i'(x_i)\big)X + f(x_i) - x_i\big(f'(x_i) - f(x_i)P_i'(x_i)\big)\Big)\, \ell_i(X)^2. \end{aligned}$$

Comme $P_i'(x_i) = 2\ell_i'(x_i)$ par la question 2.a, nous aboutissons à la formule

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \Big(\big(f'(x_i) - 2f(x_i)\ell_i'(x_i)\big)X + f(x_i) - x_i\big(f'(x_i) - 2f(x_i)\ell_i'(x_i)\big)\Big)\, \ell_i(X)^2.$$

qui s'écrit aussi

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\big(1 - 2\ell_i'(x_i)(X - x_i)\big)\ell_i(X)^2 + \sum_{i=0}^{N} f'(x_i)\big(X - x_i\big)\ell_i(X)^2.$$

3.a. La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Au rang $i = 0$, le polynôme $R_0(X) = H_f(X)$ est bien défini. Par le théorème de la division euclidienne, il existe de plus deux polynômes réels $R_1(X)$ et $S_0(X)$ uniques tels que $d^\circ(S_0(X)) < 2$, et

$$R_0(X) = S_0(X) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Comme le degré du polynôme $S_0(X)$ est inférieur ou égal à 1, il existe alors deux nombres réels α_0 et β_0 uniques tels que $S_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0)$, d'où la formule

$$R_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Réciproquement, si des nombres α_0 et β_0, et un polynôme $R_1(X)$ satisfont cette formule, alors $R_1(X)$ et $S_0(X) = \alpha_0+\beta_0(X-x_0)$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $R_0(X)$ par le polynôme $(X - x_0)^2$, d'où l'unicité des nombres α_0 et β_0, ainsi que du polynôme $R_1(X)$.

Supposons alors avoir construit de manière unique les nombres α_j et β_j jusqu'au rang $j = i$, et les polynômes $R_j(X)$ jusqu'au rang $j = i+1$. De façon similaire, nous constatons que des nombres α_{i+1} et β_{i+1}, et un polynôme $R_{i+2}(X)$ tels que

$$R_{i+1}(X) = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1}) + (X - x_{i+1})^2 R_{i+2}(X),$$

correspondent au quotient $R_{i+2}(X)$ et au reste $S_{i+1}(X) = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1})$ de la division euclidienne du polynôme $R_{i+1}(X)$ par le polynôme $(X-x_{i+1})^2$. Le théorème de la division euclidienne assure donc à la fois l'existence et l'unicité des nombres α_{i+1} et β_{i+1}, et du polynôme $R_{i+2}(X)$, ce qui permet de conclure la preuve par récurrence sur l'entier i.

b. Par définition du polynôme d'interpolation de Hermite $H_f(X)$, nous savons que

$$d^\circ\big(R_0(X)\big) = d^\circ\big(H_f(X)\big) \leq 2N + 1.$$

Vérifions alors par récurrence sur l'entier $i \geq 0$ que

$$\forall 0 \leq i \leq N + 1,\ d^\circ\big(R_i(X)\big) \leq 2(N - i) + 1.$$

Supposons en effet que cette formule soit vraie jusqu'au rang i. Au rang $i + 1$, soit le polynôme $R_{i+1}(X)$ est nul, auquel cas $d^\circ(R_{i+1}(X)) = -\infty \leq 2(N - i - 1) + 1$, soit nous déduisons de la formule de la question 3.a que

$$d^\circ\big(R_i(X)\big) = 2 + d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big),$$

de sorte que par l'hypothèse de récurrence,

$$d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big) \leq 2(N - i - 1) + 1.$$

Par récurrence, l'inégalité recherchée est donc bien valable. En particulier, nous obtenons

$$d^\circ\big(R_{N+1}(X)\big) \leq -1,$$

ce qui assure que le polynôme $R_{N+1}(X)$ est identiquement nul.

c. Vérifions par récurrence que

$$\forall 0 \leq i \leq N,\ H_f(X) = \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)^2 + \prod_{k=0}^{i} (X - x_k)^2 R_{i+1}(X).$$

Au rang $i = 0$, cette formule est vraie, puisque

$$H_f(X) = R_0(X) = \alpha_0 + \beta_0(X - x_0) + (X - x_0)^2 R_1(X).$$

Supposons donc qu'elle soit vraie jusqu'au rang i. Nous déduisons alors de l'hypothèse de récurrence et de la formule de la question 3.a que

$$\begin{aligned} H_f(X) &= \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)^2 + \prod_{k=0}^{i} (X - x_k)^2 R_{i+1}(X) \\ &= \sum_{j=0}^{i} \big(\alpha_j + \beta_j(X - x_j)\big) \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)^2 + \big(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}(X - x_{i+1})\big) \prod_{k=0}^{i} (X - x_k)^2 \\ &\quad + \prod_{k=0}^{i+1} (X - x_k)^2 R_{i+2}(X), \end{aligned}$$

ce qui assure que la formule recherchée reste valable au rang $i + 1$, puis par récurrence, quel que soit $0 \leq i \leq N$. En particulier, pour $i = N$, nous déduisons du fait que $R_{N+1}(X)$ est identiquement nul que

$$H_f(X) = \sum_{i=0}^{N} \big(\alpha_i + \beta_i(X - x_i)\big) \prod_{j=0}^{i-1} (X - x_j)^2.$$

4.a. Par définition du polynôme d'interpolation de Hermite, nous savons que

$$R_0(x_0) = H_f(x_0) = f(x_0), \quad \text{et} \quad R_0'(x_0) = H_f'(x_0) = f'(x_0).$$

D'après les formules de la question 3.a, nous calculons par ailleurs

$$R_0'(X) = \beta_0 + 2(X - x_0)R_1(X) + (X - x_0)^2 R_1'(X),$$

de sorte que

$$R_0(x_0) = \alpha_0, \quad \text{et} \quad R_0'(x_0) = \beta_0,$$

d'où les formules

$$\alpha_0 = f(x_0), \quad \text{et} \quad \beta_0 = f'(x_0).$$

b. La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Rappelons d'abord que la fonction $f_0 = f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_0, … et x_N.

Supposons ensuite que, pour $0 \leq j \leq i$, les fonctions f_j sont de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_j, … et x_N. Au rang $i+1$, les fonctions $x \mapsto (f_i(x_i) + f_i'(x_i)(x - x_i))/(x - x_i)^2$ et $x \mapsto 1/(x - x_i)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}$. Comme la fonction f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_i, … et x_N par l'hypothèse de récurrence, les opérations élémentaires sur les fonctions assurent que la fonction f_{i+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage des points x_{i+1}, … et x_N, d'où la propriété recherchée par récurrence.

c. La preuve repose à nouveau sur une récurrence sur l'entier $0 \leq i \leq N$. Au rang $i = 0$, les définitions du polynôme $R_0(X)$ et de la fonction f_0, ainsi que la question 4.a assurent que ce polynôme est le polynôme d'interpolation de Hermite de cette fonction aux points x_0, …, x_N, et que $\alpha_0 = f_0(x_0)$ et $\beta_0 = f_0'(x_0)$.

Supposons que cette propriété soit vérifiée jusqu'au rang i. Il résulte alors des formules de la question 3.a et de l'hypothèse de récurrence que

$$R_{i+1}(x) = \frac{R_i(x) - f_i(x_i) - f_i'(x_i)(x - x_i)}{(x - x_i)^2},$$

pour $x \neq x_i$, de sorte que

$$R'_{i+1}(x) = \frac{R'_i(x) - f'_i(x_i)}{(x - x_i)^2} - \frac{2\big(R_i(x) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x - x_i)\big)}{(x - x_i)^3}.$$

Sachant que $R_i(X)$ est le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_i aux points x_i, …, x_N, nous obtenons

$$R_{i+1}(x_j) = \frac{f_i(x_j) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2} = f_{i+1}(x_j),$$

pour $i + 1 \leq j \leq N$, et

$$R'_{i+1}(x_j) = \frac{f'_i(x_j) - f'_i(x_i)}{(x_j - x_i)^2} - \frac{2\big(f_i(x_j) - f_i(x_i) - f'_i(x_i)(x_j - x_i)\big)}{(x_j - x_i)^3} = f'_{i+1}(x_j).$$

Par ailleurs, nous avons démontré à la question 3.b que

$$d^\circ\big(R_{i+1}(X)\big) \leq 2(N - i - 1) + 1.$$

Par unicité, le polynôme $R_{i+1}(X)$ est donc le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f_{i+1} aux points x_{i+1}, …, x_N.

Comme à la question 4.a, nous déduisons alors des formules de la question 3.a que

$$\alpha_{i+1} = R_{i+1}(x_{i+1}), \quad \text{et} \quad \beta_{i+1} = R'_{i+1}(x_{i+1}),$$

de sorte que par définition du polynôme d'interpolation de Hermite,

$$\alpha_{i+1} = f_{i+1}(x_{i+1}), \quad \text{et} \quad \beta_{i+1} = f'_{i+1}(x_{i+1}).$$

Par récurrence, nous concluons que les polynômes R_i sont bien les polynômes d'interpolation de Hermite des fonctions f_i aux points x_i, …, x_N, et que $\alpha_i = f_i(x_i)$ et $\beta_i = f'_i(x_i)$.