CY Cergy Paris Université **Analyse numérique**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

Corrigé de l'étude mathématique du devoir à la maison N°1

1.a. Nous déduisons de la formule de récurrence pour les polynômes U_n que

$$\begin{aligned}
&U_2 = \big(2X\big)^2 - 1 = 4X^2 - 1,\\
&U_3 = 2X\big(4X^2 - 1\big) - 2X = 8X^3 - 4X,\\
&U_4 = 2X\big(8X^3 - 4X\big) - \big(4X^2 - 1\big) = 16X^4 - 12X^2 + 1,\\
&U_5 = 2X\big(16X^4 - 12X^2 + 1\big) - \big(8X^3 - 4X\big) = 32X^5 - 32X^3 + 6X.
\end{aligned}$$

b. Vérifions par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que le degré du polynôme U_n est égal à n et que son coefficient dominant est égal à 2^n. Aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, cette propriété est vraie. Le degré de $U_0 = 1$ est égal à 0 et son coefficient dominant vaut $1 = 2^0$. De même, le polynôme $U_1 = 2X$ est de degré 1 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.

Supposons maintenant que cette propriété soit vérifiée jusqu'au rang n. Le polynôme U_n s'écrit alors sous la forme $U_n = 2^n X^n + R_n$, où R_n est un polynôme de degré au plus $n-1$. Par définition du polynôme U_{n+1}, nous obtenons

$$U_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + 2XR_n - U_{n-1}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, le polynôme U_{n-1} est de degré $n-1$, tandis que le polynôme $2XR_n$ est de degré au plus n. Le terme dominant du polynôme U_{n+1} est donc $2^{n+1}X^{n+1}$. Par conséquent, ce polynôme est de degré $n + 1$, et son coefficient dominant vaut bien 2^{n+1}. Nous concluons par récurrence que les polynômes U_n sont de degré n et de coefficient dominant 2^n.

2.a. Étant donnés deux nombres $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, rappelons que

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \text{ et } \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a),$$

de sorte que

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin(a)\cos(b).$$

Pour $a = (n + 1)\theta$ et $b = \theta$, il s'ensuit que

$$\sin\big((n + 2)\theta)\big) + \sin\big(n\theta\big) = 2\sin((n + 1)\theta)\cos(\theta).$$

b. Nous vérifions cette formule par récurrence sur l'entier $n \geq 0$. Aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, nous constatons que

$$U_0(\cos(\theta)) = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \text{et} \quad U_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)},$$

pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Supposons désormais que la formule soit vraie jusqu'au rang n. Au rang $n + 1$, nous déduisons de la formule de récurrence pour les polynômes U_n, puis de l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned}
U_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)U_n(\cos(\theta)) - U_{n-1}(\cos(\theta))\\
&= \frac{2\sin((n + 1)\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},
\end{aligned}$$

d'où par la formule de la question 2.a,

$$U_{n+1}(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Par récurrence, la formule est donc valable quel que soit l'entier $n \geq 0$.

c. Considérons un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. D'après la formule de la question 2.b, nous savons que

$$P(\cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)),$$

ce qui signifie que le polynôme $P - U_n$ s'annule en tous les points de la forme $\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Autrement dit, ce polynôme s'annule sur l'intervalle $]-1,1[$. Il possède en particulier une infinité de racines, ce qui impose qu'il est identiquement nul. Nous concluons que $P = U_n$, soit que U_n est l'unique polynôme à coefficients réels qui satisfait la formule de la question 2.b.

3.a. Remarquons d'abord que

$$0 < \frac{k\pi}{n+1} < \pi,$$

lorsque $1 \leq k \leq n$, de sorte qu'aucune de ces fractions n'appartient à l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$. Nous déduisons donc de la formule de la question 2.b que

$$U_n(r_n^k) = U_n\Big(\cos\Big(\frac{k\pi}{n+1}\Big)\Big) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\big(\frac{k\pi}{n+1}\big)} = 0,$$

puisque la fonction sinus s'annule en tout multiple du nombre π. Les nombres $(r_n^k)_{1\leq k\leq n}$ sont donc des racines du polynôme U_n. Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,\pi[$, ces racines sont de plus distinctes. Sachant que le polynôme U_n est de degré n par la question 1.b, il possède au plus n racines. Par conséquent, les nombres $(r_n^k)_{1\leq k\leq n}$ sont exactement les n racines distinctes de ce polynôme.

b. Cette propriété repose sur le fait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$. Comme $0 < \pi/(n+2) < \pi/(n+1)$, nous déduisons d'abord de la formule de la question 3.a que

$$r_n^1 < r_{n+1}^1 < \cos(0) = 1.$$

Lorsque $1 \leq k \leq n-1$, nous vérifions que

$$k(n+2) < (k+1)(n+1),$$

de sorte que

$$\frac{k\pi}{n+1} < \frac{(k+1)\pi}{n+2} < \frac{(k+1)\pi}{n+1}.$$

Par décroissance stricte de la fonction cosinus sur $[0,\pi]$, nous obtenons de nouveau

$$r_n^{k+1} < r_{n+1}^{k+1} < r_n^k.$$

Enfin, nous avons également

$$\frac{n\pi}{n+1} < \frac{(n+1)\pi}{n+2} < \pi,$$

puisque

$$n(n+2) = n^2 + 2n < (n+1)^2.$$

Toujours par décroissance stricte de la fonction cosinus sur $[0,\pi]$, nous concluons que

$$-1 = \cos(\pi) < r_{n+1}^{n+1} < r_n^n.$$