GRAVEJAT Philippe

L3

6/6/22

Chapitre I : Calcul approché des zéros d'une fonction

Introduction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'objectif de ce chapitre est de présenter des méthodes pratiques de résolution de l'équation :

$$F(x_*) = 0,$$

où le point x_* appartient à l'intervalle I.

En pratique, déterminer une valeur approchée d'un zéro, ou d'une racine, x_* de la fonction F revient à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_*.$$

Le choix de la valeur approchée x_Π parmi les valeurs de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend de la précision de l'approximation recherchée. Si cette précision doit être de l'ordre d'un nombre strictement positif ε, le choix de la valeur approchée x_Π sera tel que l'erreur à l'ordre Π, qui est définie par la formule :

$$e_\Pi = x_\Pi - x_*,$$

vérifie l'inégalité :

$$|e_\Pi| \leq \varepsilon.$$

Notons ici que la valeur exacte de la racine x_* n'est pas connue en pratique. Afin de garantir la propriété précédente, le choix de la valeur approchée x_Π se fera de sorte que :

(i) $|x_\Pi - x_{\Pi+1}| \leq \varepsilon$,

(ii) l'évaluation de la vitesse de convergence vers la racine x_* soit telle que :

$$\forall m \geq \Pi, \ |x_\Pi - x_m| \leq \varepsilon.$$

Il sera donc nécessaire d'établir des estimations précises de la vitesse de convergence. Plus cette vitesse sera rapide, meilleure sera la méthode associée, puisque alors l'entier n choisi sera d'autant plus petit.

Dans la suite, nous nous contentons de présenter deux familles de méthodes de résolution de l'équation $F(x_*)=0$, qui satisfont les impératifs mentionnés ci-dessus:

- les méthodes itératives, qui reposent sur le théorème du point fixe, et consistent à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui obéit à une relation de récurrence de la forme:

  $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1}),$

  où $p\in\mathbb{N}$ et $f: I^p \to I$ est une fonction bien choisie. Nous mentionnerons en particulier les méthodes de Picard, de Newton et de la sécante.
- les méthodes d'encadrement, qui reposent sur le théorème des valeurs intermédiaires, et consistent à construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont l'encadrement:

  $\forall n\in\mathbb{N}, x_n \leq x_* \leq y_n.$

  Nous mentionnerons en particulier la méthode de la dichotomie ou de la bissection.

Nous insisterons sur l'estimation des vitesses de convergence de ces différentes méthodes suivant les propriétés de la fonction F considérée et de sa racine x_*

I Méthodes itératives

Ces méthodes reposent sur l'algorithme de Picard pour la preuve du théorème du point fixe. Considérons une fonction $F: I \to \mathbb{R}$ et cherchons à déterminer une racine x_* de cette fonction, soit une solution de l'équation:

$$F(x_*)=0.$$

Il s'agit d'abord de déterminer une fonction $f: I \to I$, qui dépend de la fonction E telle que, si $x_* \in I$ est solution de l'équation :

$$x_* = f(x_*),$$

alors :

$$E(x_*) = 0.$$

Le choix le plus simple pour la fonction f consiste à poser :

$$\forall x \in I,\ f(x) = x - E(x),$$

mais ce choix ne garantit pas nécessairement que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe, donc qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le choix d'un point $x_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n),$$

est bien définie et converge vers un point fixe x_* de la fonction f. Ce choix ne garantit pas non plus que la vitesse de convergence vers x_* soit rapide. Aussi introduisons-nous d'autres choix pour lesquels la vitesse de convergence sera meilleure. Ceci conduira aux méthodes dites de Newton et de la sécante.

1. Méthode du point fixe de Picard

a. Rappels sur la notion de complétude

Déf : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m \geq N,\ \forall n \geq N,\ |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Ex : Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.

Thm : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est complet : une suite réelle est convergente ssi elle est de Cauchy.

Dém : Il s'agit d'un axiome de la construction de l'ensemble des nombres réels.

Cor : Un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ est complet : une suite réelle à valeurs dans I est de Cauchy ssi elle est convergente de limite dans I.

Dém : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$. $\Rightarrow$ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans I, elle l'est dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R}$ t.q. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Comme I est fermé, $l \in I$.

$\Leftarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy car elle est convergente.

La notion de complétude permet d'établir qu'une série absolument convergente est convergente.

__Cor:__ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors, elle est convergente.

__Dém:__ Soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc de Cauchy. Sachant que $\forall n > m \geq 0$, $|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| = |T_n - T_m|$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

__Ex:__ $\forall \theta\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{1+n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

b. Théorème du point fixe de Banach et algorithme de Picard

Soit $f: I \to I$.

__Déf:__ Soit $a \in I$. Le point a est un point fixe de la fonction f ssi :

$$f(a) = a.$$

__Ex:__ La fonction sinus a un point fixe en 0.

__Déf:__ La fonction f est contractante ssi il existe un nombre $0 \leq K < 1$ tq que:

$$\forall (x,y)\in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y|.$$

__Ex:__ La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x)$ est contractante sur $\mathbb{R}$.

__Prop:__ Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et qu'il existe un nombre $0\leq K<1$ tel que:

$$\forall x\in I,\ |f'(x)| \leq K.$$

Alors la fonction f est contractante sur I.

__Dém:__ $\forall (x,y)\in I^2$, $|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x f'(z)\,dz\right| \leq \left|\int_y^x K\,dz\right| = K\,|x-y|$.

__Théorème du point fixe de Banach:__ Supposons que:

(i) L'intervalle I est fermé.

(ii) La fonction $f : I \to I$ est contractante pour un nombre $0 \leq K < 1$.

Alors :

(i) Il existe un unique point $a \in I$ tel que :

$$f(a) = a.$$

(ii) Si $x_0 \in I$ et si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n),$$

alors :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a.$$

(iii) L'erreur e_n à l'ordre n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = x_n - a,$$

satisfait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq m \leq n,\ |e_n| \leq \frac{K^{n-m}}{1-K} |x_{m+1} - x_m|.$$

Dém : (i) Unicité si existence : Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$; $|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq K|a - b| \Rightarrow |a - b| = 0 \Rightarrow a = b$.

(ii) Existence : Pour $x_0 \in I$, posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - x_n| \leq K|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq K^n |x_1 - x_0|$. Sachant que la série $\sum_{n \geq 0} K^n$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que : $a = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) + x_0$, ce qui revient à dire que : $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Comme I est fermé, $a \in I$, et puisque f est continue, car contractante, $f(a) = a \Rightarrow a$ est un point fixe de f.

(ii) Vitesse de convergence : Par définition : $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = x_n - a = \sum_{k=n}^{+\infty} (x_k - x_{k+1})$ $\Rightarrow |e_n| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k - x_{k+1}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} K^k |x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{1-K} |x_n - x_{n+1}|$. L'estimation recherchée découle alors de l'inégalité : $\forall\, 0 \leq m \leq n,\ |x_n - x_{n+1}| \leq K^{n-m} |x_m - x_{m+1}|$

Rem : (i) Le théorème n'est plus vrai lorsque I n'est pas fermé.

Ex : La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est contractante sur $]0, +\infty[$, mais n'a pas de point fixe dans $]0, +\infty[$.

(ii) Le théorème n'est plus vrai lorsque f n'est pas à valeurs dans I.

Ex : La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est contractante sur $[1, +\infty[$, mais n'a pas de point fixe dans $[1, +\infty[$.

(iii) La méthode de Picard associée au théorème du point fixe permet la détermination de plusieurs points fixes de la fonction f qui correspondent à des intervalles fermés distincts de $\mathbb{R}$ dans lesquels la fonction f est contractante.

2. Etude générale des points fixes

a. Rappels sur le théorème des accroissements finis et les formules de Taylor

Supposons que $I = [a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Théorème de Rolle: Supposons que:

(i) f est une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.

(iii) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que:

$$f'(c) = 0$$

Dém: Soit $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$; si $M > f(a)$, alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $M = f(c)$ $\Rightarrow f'(c) = 0$; sinon, $M = f(a)$, et si $m < f(a)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $m = f(c)$ $\Rightarrow f'(c) = 0$; sinon, $m = M = f(a) \Rightarrow f$ est constante sur $[a,b] \Rightarrow \forall c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis: Supposons que:

(i) f est une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Dém: Soit $\forall x \in [a,b]$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$; comme $g(b) = f(a) = g(a)$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Inégalité des accroissements finis: Supposons que:

(i) f est une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.

(iii) Il existe un nombre $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq M$.

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$$

Dém: Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.

Ex: Soit $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \ln(x)$. Si $0 < a < b$, alors :

$$|\ln(b) - \ln(a)| = |f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|}{a}.$$

Supposons que $p \in \mathbb{N}$.

Formule de Taylor - Lagrange : Supposons que :

(i) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(ii) $f^{(p)}$ est dérivable sur $]a,b[$ de dérivée égale à $f^{(p+1)}$.

Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c).$$

Dém: Soit $A = \frac{(p+1)!}{(b-a)^{p+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$ et $\forall x \in [a,b]$, $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}$; comme $g(a) = g(b) = 0$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$; sachant que $\forall x \in [a,b]$, $g'(x) = -f'(x) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + A\frac{(b-x)^p}{p!} = \frac{(b-x)^p}{p!}\left(A - f^{(p+1)}(x)\right)$, $A = f^{(p+1)}(c) \Rightarrow$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c).$$

Inégalité de Taylor - Lagrange : Supposons que :

(i) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

(ii) $f^{(p)}$ est dérivable sur $]a,b[$ de dérivée égale à $f^{(p+1)}$.

(iii) Il existe un nombre $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in]a,b[, |f^{(p+1)}(x)| \leq M$.

Alors :

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}$$

Dém: Par la formule de Taylor - Lagrange, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c) \Rightarrow \left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}$

Formule de Taylor avec reste intégral : Supposons que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x)\, dx.$$

Dém: Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, au rang $p=0$, $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$; si la formule est vraie jusqu'au rang p, alors, au rang $p+1$, $\int_a^b \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x)\,dx = \left[-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(x)\,dx = \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(x)\,dx$, d'où le résultat par l'hypothèse de récurrence.

Ex: Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-y)^p}{p!} f^{(p+1)}(y)\,dy = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{p+1}}{p!} \times \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(tx)\,dt$$

b. Classification des points fixes et applications

Déf: Supposons que :

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(ii) f a un point fixe $a \in I$.

Alors : (i) Le point fixe a est attractif ssi $|f'(a)| < 1$.

(ii) Le point fixe a est super-attractif ssi $f'(a) = 0$.

(iii) Le point fixe a est répulsif ssi $|f'(a)| > 1$.

Ex: La fonction carrée a un point fixe super-attractif en 0.

Thm: Supposons que :

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(ii) f a un point fixe $a \in I$.

Le point fixe a est attractif ssi il existe deux nombres $0 \le k < 1$ et $R > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in [a-R, a+R]^2,\ |f(x) - f(y)| \le k\,|x-y|.$$

Dém: $\Leftarrow$ $\forall h \in [-R,R]$, $|f(a+h) - f(a)| \le k\,|h| \overset{h \to 0}{\Rightarrow} |f'(a)| \le k < 1$.

$\Rightarrow$ Comme f' est continue en a et $|f'(a)| < 1$, il existe deux nombres $0 \le k < 1$ et $R > 0$ tels que : $\forall x \in [a-R, a+R]$, $|f'(x)| \le k$; d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall (x,y) \in [a-R, a+R]^2$, $|f(x) - f(y)| \le k\,|x-y|$.

Rem: (i) Lorsque le point fixe a est attractif, le théorème du point fixe s'applique sur le segment $[a-R, a+R]$. En effet, la fonction f est contractante sur ce segment et à valeurs dans ce segment, puisque :

$\forall x \in [a-R, a+R]$, $|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \leq K|x-a| \leq |x-a| \leq R$.

En particulier, a est l'unique point fixe de f dans ce segment.

(ii) Lorsque le point fixe a est répulsif, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que $\forall x \in [a-\rho, a+\rho]$, $f'(x) \neq 0$. En particulier, la fonction f est strictement monotone sur $[a-\rho, a+\rho]$, donc par continuité, réalise une bijection de $[a-\rho, a+\rho]$ sur son image par f. La bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $f(a) = a$, avec : $\left|[f^{-1}]'(a)\right| = \left|\frac{1}{f'(a)}\right| < 1$. Le point fixe a est attractif pour la bijection réciproque f^{-1}. En pratique, le déterminer par la méthode de Picard revient néanmoins à calculer les valeurs de la fonction f^{-1}, soit à résoudre des équations de la forme $y = f(x)$.

Le théorème précédent conduit à la mise en pratique suivante de l'algorithme de Picard. Résoudre l'équation $E(x_*) = 0$ revient à déterminer les points fixes des fonctions :

$$f(x) = x - \lambda E(x),$$

où le nombre $\lambda \neq 0$ est bien choisi. Lorsque la fonction E est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f l'est aussi et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 1 - \lambda E'(x).$$

Un point fixe a de f est attractif dès que le nombre λ satisfait l'inégalité $|1 - \lambda E'(a)| < 1$, ce qui est toujours possible lorsque $E'(a) \neq 0$. Dans ce cas, les suites définies par le choix d'une valeur $x_0 \in I$ suffisamment proche de a, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \lambda E(x_n),$$

convergent vers le point a qui sera une solution de l'équation :

$$E(a) = 0.$$

Cet algorithme nécessite néanmoins de connaître une valeur approchée de a pour bien choisir le point x_0, ainsi qu'une valeur approchée de $E'(a)$ pour définir correctement la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons qu'alors la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point fixe a sera au moins géométrique, ou suivant la terminologie suivante, au moins d'ordre 1.

Déf: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite x_*. Notons e_n l'erreur à l'ordre n définie par:

$\forall n\in\mathbb{N}, \ e_n = x_n - x_*$.

(i) La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins d'ordre 1, ou au moins géométrique, ssi il existe un nombre $0\leq K<1$ et un entier $N\in\mathbb{N}$ tels que:

$\forall n\geq N, \ |e_{n+1}|\leq K|e_n|$.

(ii) La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins d'ordre 2, ou au moins quadratique, ssi il existe un nombre $K\geq 0$ et un entier $N\in\mathbb{N}$ tels que:

$\forall n\geq N, \ |e_{n+1}|\leq K|e_n|^2$.

(iii) Soit $p>1$. La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins d'ordre p si et seulement si il existe un nombre $K\geq 0$ et un entier $N\in\mathbb{N}$ tels que:

$\forall n\geq N, \ |e_{n+1}|\leq K|e_n|^p$.

Ex: (i) La suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge au moins géométriquement vers 0.

(ii) La suite $(2^{-2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge au moins quadratiquement vers 0.

Rem: (i) La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite exactement d'ordre $p\geq 1$ ssi il existe deux nombres $0\leq K_1\leq K_2$ (<1 si $p=1$) et un entier $N\in\mathbb{N}$ tels que:

$\forall n\geq N, \ K_1|e_n|^p\leq |e_{n+1}|\leq K_2|e_n|^p$.

Cette notion est plus difficile à vérifier que celle de la convergence au moins d'ordre $p\geq 1$, d'où l'intérêt de cette dernière notion.

(ii) Sous les hypothèses du théorème du point fixe, la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par l'algorithme de Picard est au moins géométrique car la fonction f est contractante.

(iii) La convergence est d'autant meilleure que l'ordre p de convergence est grand. Il est donc intéressant d'optimiser l'ordre p de convergence d'une méthode itérative.

Thm: Supposons que:

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

(ii) Elle possède un point fixe super-attractif $a\in I$.

Alors il existe deux nombres $K\geq 0$ et $R>0$ tels que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$x_0 \in [a-R, a+R]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$,

sont bien définies **et convergent** vers a. De plus, elles satisfont :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|e_{n+1}| \leq K |e_n|^2$.

Autrement dit, leur convergence est au moins quadratique.

Dém : Comme a est super-attractif, a est attractif, et il existe donc un nombre $R > 0$ tel que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **sont bien définies et convergent vers a pour x_0** $\in [a-R, a+R]$. Par continuité de la dérivée seconde f'', il existe de plus un nombre $K \geq 0$ tel que : $\forall x \in [a-R, a+R]$, $|f''(x)| \leq 2K$. L'inégalité de Taylor-Lagrange assure alors que : $\forall x \in [a-R, a+R]$, $|f(x) - f(a)| \leq K |x-a|^2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq K |x_n - a|^2$.

Rem : Dans la mise en pratique précédente de l'algorithme de Picard, le choix unique du nombre λ tel que a est un point fixe super-attractif est égal à :

$\lambda = \frac{1}{F'(a)}$.

Ce choix assure une convergence au moins quadratique de l'algorithme, mais outre qu'il nécessite de savoir calculer la dérivée F', il présuppose de connaître la valeur (recherchée) du point fixe a. La méthode de Newton que nous décrivons ci-dessous apparaît comme une variante de ce choix.

Thm : Soit $p \geq 2$. Supposons que :

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

(ii) Cette fonction possède un point fixe super-attractif $a \in I$ tel que :

$f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$.

Alors il existe des nombres $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ et $R > 0$ tels que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$x_0 \in [a-R, a+R]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$,

sont bien définies et convergent vers a. De plus, elles satisfont :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $K_1 |e_n|^p \leq |e_{n+1}| \leq K_2 |e_n|^p$.

Autrement dit, leur convergence est exactement d'ordre p.

Dém : Par le théorème précédent, il est suffisant d'établir la dernière inégalité. La formule de Taylor avec reste intégral assure que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} = f(e_n + a) -$

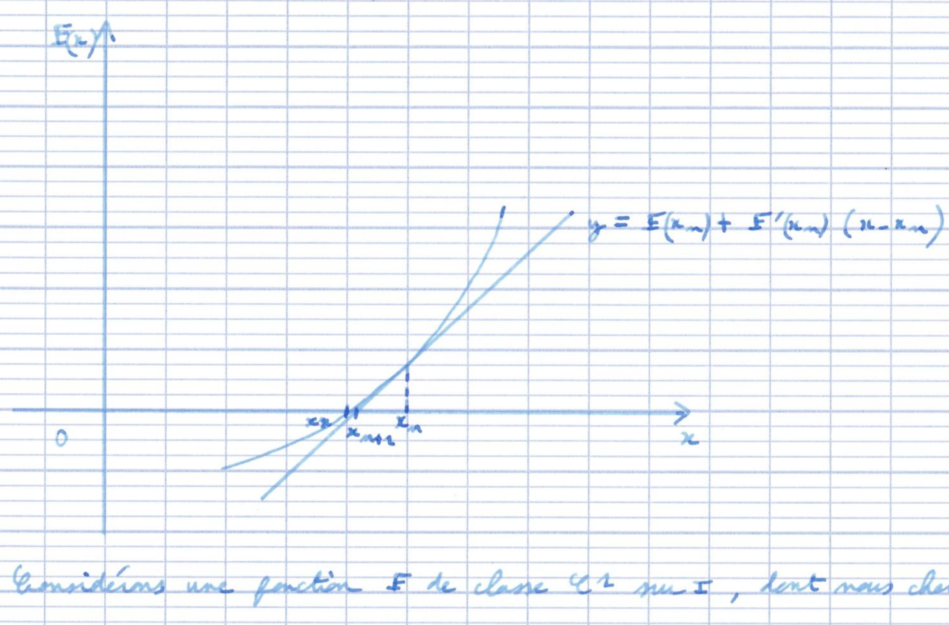
$f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^{a+e_n} (a+e_n-x)^{p-1} f^{(p)}(x)\,dx \overset{x=a+te_n}{=} \frac{e_n^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(f^{(p)}(a+te_n) - f^{(p)}(a) \right) dt + \frac{e_n^p}{p!} f^{(p)}(a)$; par continuité de la fonction $f^{(p)}$, quitte à réduire le nombre R, $\forall x \in [a-R, a+R]$, $|f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a)| \leq \frac{1}{2} |f^{(p)}(a)|$, ce qui conduit à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{e_n^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(f^{(p)}(a+te_n) - f^{(p)}(a) \right) dt \right| \leq \frac{|e_n|^p}{2p!} |f^{(p)}(a)| \Rightarrow \frac{|f^{(p)}(a)|}{2p!} |e_n|^p \leq |e_{n+1}| \leq \frac{3|f^{(p)}(a)|}{2} |e_n|^p$, d'où l'inégalité pour $K_1 = \frac{|f^{(p)}(a)|}{2p!}$ et $K_2 = \frac{3|f^{(p)}(a)|}{2p!}$.

Rem : (i) Lorsque la condition $f^{(p)}(a) \neq 0$ n'est pas vérifiée, l'inégalité de Taylor-Lagrange assure que la convergence reste au moins d'ordre p.

(ii) La méthode de Picard est ainsi d'autant meilleure que les dérivées de la fonction f au point fixe a recherché s'annulent. Il est intéressant de choisir cette fonction f de façon à ce que le plus de dérivées possibles de f s'annulent en a.

3. Méthode de Newton

La méthode de Newton repose sur le principe suivant :



Considérons une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, dont nous cherchons à déterminer une racine x_*, ainsi qu'un point initial $x_0 \in I$. Une bonne approximation de la fonction F au point x_0 est fournie par sa tangente en ce point, soit la droite d'équation :

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Si le point x_0 n'est pas trop éloigné du point x_*, ce dernier point sera proche du point x_1 d'intersection des droites :

$$\text{Et}\begin{cases} y = 0 \\ y = F(x_0) + F'(x_0)\,(x_1 - x_0), \end{cases}$$

dès lors que ces deux droites s'intersecteront, c'est-à-dire lorsque la dérivée $F'(x_0)$ sera non nulle. Dans ce cas, le point x_1 sera donné par la formule :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Lorsque les dérivées successives seront non nulles, il sera possible d'itérer ce procédé et de construire une suite de points x_n suivant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

En cas de convergence vers un point $x_* \in I$ tel que $F'(x_*) \neq 0$, la méthode itérative ainsi construite fournira une solution x_* de l'équation :

$$F(x_*) = 0.$$

Lorsqu'elle est bien définie, cette méthode dite de Newton présente l'avantage d'une vitesse de convergence, en général, au moins quadratique.

Lem : Supposons que :

(i) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

(ii) Cette fonction possède une racine $x_* \in I$ telle que :

$$F'(x_*) \neq 0.$$

Alors il existe un nombre $R > 0$ tel que la fonction f définie par :

$$\forall x \in [x_* - R_*, x_* + R_*],\ f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)},$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_* - R, x_* + R]$, et de plus, le point x_* est un point fixe super-attractif de la fonction f.

Dém : Comme $F'(x_*) \neq 0$, par continuité de F', il existe un nombre $R_* > 0$ tel que $\forall x \in [x_* - R_*, x_* + R_*]$, $F'(x) \neq 0$; f est alors bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_* - R_*, x_* + R_*]$, avec : $\forall x \in [x_* - R_*, x_* + R_*]$, $f'(x) = \dfrac{F(x)F''(x)}{F'(x)^2} \Rightarrow f'(x_*) = 0$.

Thm : Supposons que :

(i) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I.

(ii) Cette fonction possède une racine $x_* \in I$ telle que :

$F'(x_*) \neq 0$.

Alors il existe un nombre $R>0$ tel que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$x_0 \in [x_* - R, x_* + R]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$,

sont bien définies et convergent au moins quadratiquement vers la racine x_*.

<u>Dém</u> : C'est un corollaire des théorèmes précédents puisque la fonction f définie par :

$\forall x \in [x_* - R_*, x_* + R_*],\ f(x) = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$,

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_* - R_*, x_* + R_*]$, et qu'elle possède un point fixe super-attractif en x_*.

La méthode de Newton peut garder un sens même si la dérivée $F'(x_*)$ s'annule, mais la convergence n'est alors plus que géométrique.

<u>Thm</u> : Soit $p \geq 2$. Supposons que :

(i) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

(ii) Cette fonction possède une racine $x_* \in I$ telle que :

$F(x_*) = F'(x_*) = \dots = F^{(p-1)}(x_*) = 0$ et $F^{(p)}(x_*) \neq 0$.

Alors il existe un nombre $R>0$ tel que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$x_0 \in [x_* - R, x_* + R]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \begin{cases} x_n & \text{si } F'(x_n) = 0, \\ x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} & \text{sinon,} \end{cases}$

sont bien définies et convergent exactement géométriquement vers la racine x_*.

<u>Dém</u> : Soit $\forall x \in I$, $f(x) = x^*$ si $x = x^*$, $x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$ sinon. Les développements limités en x_* des fonctions F et F' s'écrivent :

$F(x) = \dfrac{F^{(p)}(x_*)}{p!}(x - x_*)^p + \underset{x\to x_*}{o}(x - x_*)^p$ et $F'(x) = \dfrac{F^{(p)}(x_*)}{(p-1)!}(x - x_*)^{p-1} + \underset{x\to x_*}{o}(x - x_*)^{p-1}$

En particulier, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que : $\forall x \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, $F'(x) = 0 \iff x = x^* \Rightarrow f$ est bien définie sur $[x_* - \rho, x_* + \rho]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_* - \rho, x_*[$ et $]x_*, x_* + \rho]$. Comme $\dfrac{F(x)}{F'(x)} \underset{x\to x_*}{\sim} \dfrac{1}{p}(x - x_*)$, f se prolonge par continuité en x_*. Sachant que le développement limité en x_* de la fonction F'' s'écrit : $F''(x) = \dfrac{F^{(p)}(x_*)}{(p-2)!}(x - x_*)^{p-2} + \underset{x\to x_*}{o}(x - x_*)^{p-2}$, $f'(x) = \dfrac{F(x)\,F''(x)}{F'(x)^2} \underset{x\to x_*}{\sim} \dfrac{p-1}{p} \Rightarrow f$ se prolonge de façon $\mathcal{C}^1$ en x_* en posant

$f'(x_*) = \frac{p-1}{p}$. En particulier, il existe deux nombres $K_1 \geq 0$ et $K_1 \leq K_2 < 1$, et un nombre $0 < R < \rho$ tels que : $\forall x \in [x_* - R, x_* + R]$, $K_1 \leq f'(x) \leq K_2 \Rightarrow x_*$ est un point fixe attractif $\Rightarrow$ La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie, puisque $\forall x \in [x_* - R, x_* + R]$, $F'(x) = 0 \iff x = x_*$, et elle est convergente de limite x_* ; enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, K_1 |e_n| \leq |e_{n+1}| \leq K_2 |e_n| \Rightarrow$ La convergence est exactement géométrique.

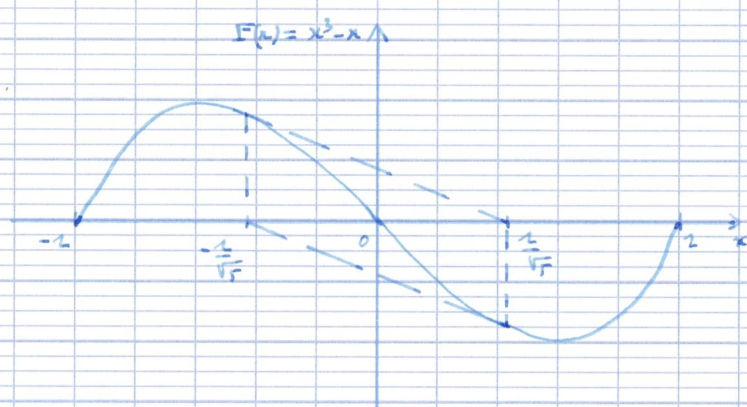
Rem : (i) Ce théorème établit la robustesse de la méthode de Newton qui continue à converger vers une racine de F, même si les hypothèses sur la dérivée de F ne sont pas optimales, et quitte à limiter la vitesse de convergence.

(ii) En pratique, le choix du point initial x_0 est décisif, car la convergence n'est assurée que dans un voisinage de la racine x_*. La méthode de Newton se révèle divergente lorsque le point initial x_0 est mal choisi.

Ex : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 - x$. Pour $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, l'algorithme de Newton pour la fonction f conduit à la suite :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}$,

laquelle est divergente.

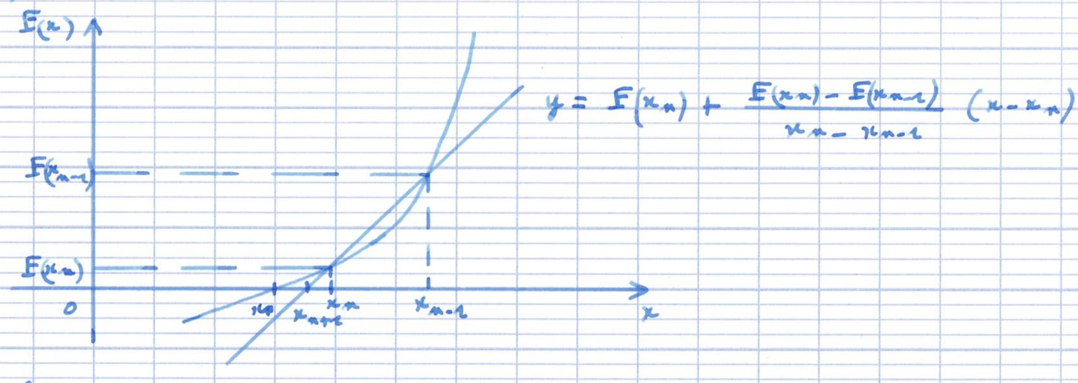


(iii) Il n'est pas toujours évident de calculer la dérivée de la fonction F, par exemple lorsqu'un algorithme précédent ne fournit qu'un nombre discret de valeurs de cette fonction. Une première façon de remédier à cette difficulté consiste à introduire une méthode pour laquelle le calcul de la dérivée n'est plus nécessaire, par exemple, la méthode de la sécante que nous analysons en détails ci-après. Bien sûr, il n'y a alors aucune garantie que la convergence de cette nouvelle méthode soit aussi rapide que celle de la méthode de Newton, et c'est en effet le cas de la méthode de la sécante.

Il est aussi permis de modifier la méthode de Newton en fixant la valeur de la dérivée pour un certain nombre d'itérations, puis à l'actualiser au bout d'un nombre k fixé d'itérations. Ce procédé réduit le nombre de calculs de la dérivée à effectuer. Lorsque la méthode de Newton initiale est convergente et lorsque la dérivée F' est continue, l'erreur ainsi faite est assez petite pour que cette nouvelle méthode continue à converger vers la racine x_* de F. Comme la méthode de la sécante, ces méthodes de Newton modifiées peuvent s'avérer moins rapides que la méthode de Newton.

4. Méthode de la sécante

Il s'agit d'une alternative à la méthode de Newton. La différence entre les deux méthodes réside dans le fait de remplacer la dérivée $F'(x_n)$ de la fonction F à l'étape n par le taux d'accroissement $\dfrac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. La méthode de la sécante repose donc sur le principe suivant:



Considérons une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, dont nous cherchons à déterminer une racine x_*, ainsi que deux points initiaux $x_0 \in I$ et $x_1 \in I$ distincts. Si ces points sont suffisamment proches, une bonne approximation de la fonction F aux points x_0 et x_1 est donnée par la sécante à la courbe de F qui passe par ces deux points, soit la droite d'équation:

$$y = F(x_1) + \frac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

La racine x_* est donc proche du point x_2 d'intersection des droites:

$$\text{Et}\left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ y = F(x_1) + \dfrac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1), \end{array}\right.$$

dès lors que ces deux droites s'intersectent, c'est-à-dire lorsque la pente $\frac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1-x_0}$ est non nulle. Dans ce cas, le point x_2 sera donné par la formule :

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(x_1-x_0)}{F(x_1)-F(x_0)}.$$

Lorsque les taux d'accroissements successifs sont non nuls, il est possible d'itérer ce procédé et de construire une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)\,(x_n - x_{n-1})}{F(x_n)-F(x_{n-1})}.$$

En cas de convergence vers un point $x_* \in I$ tel que $F'(x_*) \neq 0$, cette méthode de la sécante fournit une solution x_* de l'équation :

$$F(x_*) = 0.$$

Par rapport à la méthode de Newton, un avantage de la méthode de la sécante provient de la plus grande facilité à calculer un taux d'accroissement qu'une dérivée. Par contre, l'approximation ainsi obtenue de la fonction F est moins bonne, ce qui ralentit la vitesse de convergence vers la racine x_*. La convergence de la méthode de la sécante demeure néanmoins assez rapide.

Thm : Supposons que :

(i) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

(ii) Cette fonction possède un point $x_* \in I$ tel que : $F'(x_*) \neq 0$.

Alors il existe un nombre $R > 0$ tel que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$(x_0, x_1) \in [-R + x_*, x_* + R]$, avec $x_1 \neq x_0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n = x_{n-1} \\ x_n - \dfrac{F(x_n)(x_n - x_{n-1})}{F(x_n) - F(x_{n-1})} & \text{sinon} \end{cases}$

sont bien définies et convergentes de limite x_*. De plus, il existe des nombres $C > 0$ et $0 < \theta < 1$ tels que l'erreur $e_n = x_n - x_*$ à l'ordre n satisfait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |e_n| \leq C\,\theta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Dém : (i) Définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, il existe un nombre $v > 0$ tel que :

$$\begin{cases} m = \min\limits_{x \in [x_*-v,\, x_*+v]} |F'(x)| > 0, \\ \text{et } M = \max\limits_{x \in [x_*-v,\, x_*+v]} |F''(x)| < +\infty. \end{cases}$$

Considérons alors un nombre $0 < \rho < v$ tel que :

$$0 < \frac{2M\rho}{m} < 1.$$

Fixons deux points $(x_0, x_1) \in [x_* - \rho, x_* + \rho]^2$ tels que $x_0 \neq x_1$ et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le nombre x_n est bien défini, appartient au segment $[x_* - \rho, x_* + \rho]$ et vérifie la propriété : $x_n = x_{n-1} \Rightarrow x_n = x_{n-1} = x_*$
Cette hypothèse de récurrence est vraie au rang $n = 1$. Si elle est vraie jusqu'au rang n, alors, au rang $n+1$, soit $x_n = x_{n-1} \Rightarrow x_n = x_*$ et $x_{n+1} = x_* = x_n \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, soit $x_n \neq x_{n-1}$; comme E est strictement monotone sur $[x_* - \rho, x_* + \rho]$, $E(x_n) \neq E(x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{E(x_n)(x_n - x_{n-1})}{E(x_n) - E(x_{n-1})}$; si $x_{n+1} = x_n$, alors, $E(x_n) = 0$, et par monotonie stricte de E, $x_{n+1} = x_n = x_* \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$; si $x_{n+1} \neq x_n$, alors :

$$x_{n+1} - x_* = x_n - x_* - \frac{E(x_n) - E(x_*)}{E(x_n) - E(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1})$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe des nombres $y_n \in]x_n, x_*[$ et $z_n \in]x_{n-1}, x_n[$ tels que : $E(x_n) - E(x_*) = (x_n - x_*) E'(y_n)$ et $E(x_n) - E(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) E'(z_n) \Rightarrow x_{n+1} - x_* = (x_n - x_*) \dfrac{E'(z_n) - E'(y_n)}{E'(z_n)}$; par l'inégalité des accroissements finis, $|E'(z_n) - E'(y_n)| \leq M |z_n - y_n| \leq 2M\rho$ $\Rightarrow |x_{n+1} - x_*| \leq \dfrac{2M\rho}{m} |x_n - x_*| \leq |x_n - x_*| \leq \rho \Rightarrow x_{n+1} \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, ce qui conclut par récurrence la preuve du caractère bien défini de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) <u>Convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$</u> : D'après le point (i), $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_*| \leq \dfrac{2M\rho}{m} |x_n - x_*| \leq \left(\dfrac{2M\rho}{m}\right)^n |x_1 - x_*| \Rightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_*$; de plus, la convergence est au moins géométrique.

(iii) <u>Estimation de l'erreur e_n</u> : Nous pouvons supposer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$; sinon, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $e_N = 0 \Rightarrow x_N = x_* \Rightarrow \forall n \geq N$, $x_n = x_* \Rightarrow e_n = 0$, et l'estimation de l'erreur e_n découlera de sa preuve jusqu'au rang N. Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$, $x_n \neq x_* \Rightarrow e_{n+1} = x_{n+1} - x_* = (x_n - x_*) \left(1 - \dfrac{E(x_n) - E(x_*)}{x_n - x_*} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{E(x_n) - E(x_{n-1})}\right)$; soit alors $\forall y \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, $G(y) = \dfrac{E(y) - E(x_n)}{y - x_n}$ si $y \neq x_n$, $E'(x_n)$ sinon ; G est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_* - \rho, x_* + \rho]$ et vérifie : $\forall y \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, $G'(y) = \frac{1}{2} E''(x_n)$ si $y = x_n$, $\dfrac{E(x_n) - E(y) + E'(y)(y - x_n)}{(y - x_n)^2}$ si $y \neq x_n$; par la formule de Taylor avec reste intégral, nous avons donc : $\forall y \in [x_* - \rho, x_* + \rho]$, $|G'(y)| \leq \frac{M}{2}$; comme $e_{n+1} = (x_n - x_*) \dfrac{G(x_{n-1}) - G(x_*)}{G(x_{n-1})}$, $|e_{n+1}| \leq \dfrac{M}{2} |e_n| |e_{n-1}| \times \dfrac{1}{|G(x_{n-1})|}$ –

Par le théorème des accroissements finis, $|G(x_{n-1})| \geq m$, d'où l'inégalité finale :

$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} |e_n| \, |e_{n-1}|$.

Soit alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \ln\left(\frac{M}{2m}|e_n|\right)$; la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$; par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \leq$

$$\frac{2\varepsilon_1 - (1-\sqrt{5})\varepsilon_0}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{(1+\sqrt{5})\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Sachant que $\frac{M}{2m}|e_n| \leq \frac{M\rho}{2m} < 1$, $\varepsilon_0 < 0$ et $\varepsilon_1 < 0 \Rightarrow$ il existe un entier $N \geq 0$ et un nombre $A < 0$ tel que : $\forall n \geq N$, $\varepsilon_n \leq A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow |e_n| \leq \frac{2m}{M}\left(e^A\right)^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

L'inégalité $|e_n| \leq C\,\theta^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$ en découle pour $\theta = e^A$ et C assez grand.

Rem : (i) L'estimation précédente de la vitesse de convergence de la méthode de la sécante correspond à une convergence au moins d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En effet, si une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|e_{n+1}| \leq K|e_n|^p$,

pour des nombres $K \geq 0$ et $p > 1$, alors elle satisfait :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|e_n| \leq K^{\frac{1}{1-p}} \left[K^{\frac{1}{p-1}} |e_0|\right]^{p^n}$.

Cette convergence est moins bonne que celle au moins quadratique de la méthode de Newton, mais demeure plus satisfaisante que celle au moins géométrique de la méthode de Picard.

(ii) En pratique, le calcul du taux d'accroissement $\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ devient singulier lorsque x_n et x_{n-1} sont trop proches. Il se heurte de plus au problème des erreurs d'arrondis. Aussi est-il préférable d'itérer en maintenant ce taux d'accroissement constant lorsque la différence entre les points x_{n-1} et x_n se rapproche de l'erreur machine.

II Méthodes d'encadrement

1. Théorème des valeurs intermédiaires et principe des méthodes d'encadrement

Supposons que $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Théorème des valeurs intermédiaires: Supposons que la fonction F est continue sur le segment $[a,b]$. Alors, pour tout nombre λ du segment $[F(a), F(b)]$, il existe un nombre $c \in [a,b]$ tel que:

$$\lambda = F(c).$$

Dém: Pour $\lambda = F(a)$, respectivement $\lambda = F(b)$, $c = a$, respectivement $c = b$, conviennent; sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F(a) < \lambda < F(b)$; le cas $F(a) > \lambda > F(b)$ se traite avec la même preuve dans laquelle les inégalités sont renversées; soit $I_\lambda = \{x \in [a,b] \text{ t.q. } \forall y \in [a,x],\ F(y) < \lambda\}$ et $c = \sup I_\lambda$; comme $F(a) < \lambda$, $a \in I_\lambda \Rightarrow c$ est bien défini; comme il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I_λ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$, par continuité de F, $F(c) \leq \lambda$, et par définition de I_λ, $\forall x \in [a,c[$, $F(x) < \lambda$; si $F(c) < \lambda$, alors par continuité de F, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que: $\forall x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, $F(x) < \lambda \Rightarrow c+\varepsilon \in I_\lambda$ ce qui est absurde! $\Rightarrow F(c) = \lambda$.

Le principe des méthodes d'encadrement repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème garantit en effet qu'une fonction F continue sur $[a,b]$ et telle que:

$$F(a) < 0 \text{ et } F(b) > 0 \quad (\text{ou bien } F(a) > 0 \text{ et } F(b) < 0),$$

possède une racine x_* dans l'intervalle $]a,b[$. Les méthodes d'encadrement consistent alors à choisir un point $c \in]a,b[$ et à tester si $F(c) < 0$ ou si $F(c) > 0$. Dans le premier cas, F possède une racine dans le segment $[c,b]$, dans le second cas, elle possède une racine dans le segment $[a,c]$. Réduire de manière itérée la taille de cet intervalle permet in fine de calculer une valeur approchée d'une racine de la fonction F.

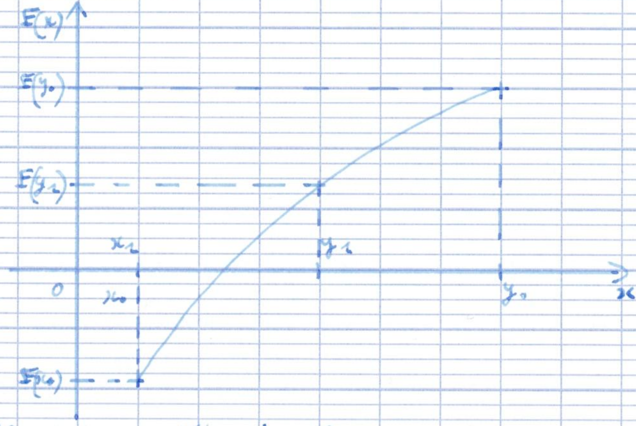
Les méthodes d'encadrement diffèrent suivant le choix du point c en fonction des points a et b. La méthode de dichotomie ou de bissection utilise le milieu $c = \frac{a+b}{2}$ du segment $[a,b]$. La méthode de la fausse position reprend le choix de la méthode de la sécante.

2. Méthode de la dichotomie ou de la bissection

Considérons une fonction F continue sur l'intervalle I et supposons qu'il existe deux points $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, tels que :

$F(x_0) < 0 < F(y_0)$.

La méthode de la dichotomie ou de la bissection repose sur le principe suivant :



Il s'agit de déterminer le signe de la quantité $F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)$, puis suivant ce signe, à choisir des points $x_1 \in I$ et $y_1 \in I$ tels que :

(i) $F(x_1) < 0 < F(y_1)$,

(ii) $|x_1 - y_1| = \frac{1}{2}|x_0 - y_0|$.

Ce choix est assuré par les points :

$$\text{Et} \begin{cases} x_1 = x_0 \text{ et } y_1 = \frac{x_0+y_0}{2} & \text{si } F(y_1) > 0, \\ x_1 = \frac{x_0+y_0}{2} \text{ et } y_1 = y_0 & \text{si } F(y_1) < 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $F\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) = 0$, la racine recherchée est trouvée par $x_* = \frac{x_0+y_0}{2}$. Il est possible d'itérer ce procédé pour construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adjacentes par la propriété (ii) ci-dessus, qui convergeront vers une racine x_* de la fonction F.

Thm : Supposons que :

(i) F est continue sur l'intervalle I,

(ii) Il existe des nombres $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$ tels que : $F(x_0) < 0 < F(y_0)$.

Définissons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Et} \begin{cases} x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) = 0, \\ x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = y_n & \text{si } F\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors bien définies et convergentes de limite une racine x_* de la fonction F. De plus, l'erreur e_n au rang n définie par:

$e_n = \max\{|x_n - x_*|, |y_n - x_*|\}$,

satisfait:

$\forall n\in\mathbb{N},\ e_n \leq \frac{|x_0-y_0|}{2^n}$.

Dém: Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies; la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, et:
$\forall n\in\mathbb{N},\ |y_n - x_n| \leq \frac{|y_0-x_0|}{2^n}$. Ces suites sont donc adjacentes et ont une limite commune $x_* \in I$. Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ F(x_n) \leq 0 \leq F(y_n)$, la continuité de F assure que: $F(x_*)=0$. Enfin, $\forall n\in\mathbb{N},\ e_n \leq |x_n-y_n| \leq \frac{|x_0-y_0|}{2^n}$.

Rem: (i) La convergence de la méthode de dichotomie est donc au moins géométrique, ce qui est très correct, même si la méthode de Newton peut converger plus vite.

(ii) La méthode de la dichotomie présente l'avantage d'une convergence assurée une fois les points x_0 et y_0 correctement choisis. Ce choix est plus difficile pour les méthodes itératives qui ne convergent en général qu'au voisinage de la racine à déterminer.

(iii) La méthode de la dichotomie présente l'inconvénient de ne s'appliquer qu'aux fonctions F pour lesquelles il existe des points initiaux $x_0\in I$ et $y_0 \in I$ tels que:

$F(x_0) < 0 < F(y_0)$ (ou bien $F(x_0) > 0 > F(y_0)$).

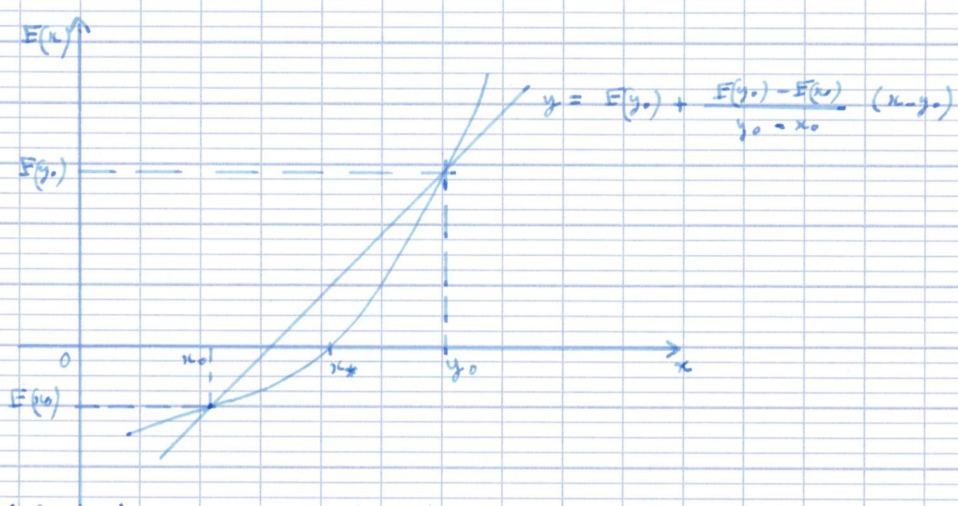
Cette hypothèse n'est pas vérifiée même par des fonctions simples comme la fonction carrée qui pourtant s'annule en 0. Cette difficulté s'étend bien sûr aux autres méthodes d'encadrement telles que la méthode de la fausse position.

3. Méthode de la fausse position

Considérons une fonction F continue sur l'intervalle I et supposons qu'il existe deux points $x_0\in I$ et $y_0 \in I$ tels que:

$F(x_0) < 0 < F(y_0)$.

La méthode de la fausse position repose sur le principe suivant :



Si les points x_0 et y_0 sont suffisamment proches, une bonne approximation de la fonction E aux points x_0 et y_0 est donnée par la sécante à la courbe de la fonction E qui passe par ces deux points, soit la droite d'équation :

$$y = E(y_0) + \frac{E(y_0)-E(x_0)}{y_0-x_0}(x-y_0)$$

La racine x_* est alors proche du point d'intersection z_0 de cette droite et de la droite d'équation $y=0$, qui est donné par la formule :

$$z_0 = \frac{E(y_0)x_0 - y_0 E(x_0)}{E(y_0)-E(x_0)}.$$

Suivant le signe de $E(z_0)$, la racine x_* appartient à l'intervalle $]x_0, z_0]$ ou à l'intervalle $[z_0, y_0[$, et les points x_1 et y_1 sont définis de manière ad hoc. Il est possible d'itérer ce procédé pour construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les formules :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = y_{n+1} \text{ si } x_n = y_n, \\ x_{n+1} = z_n = \dfrac{E(y_n)x_n - y_n E(x_n)}{E(y_n)-E(x_n)} \text{ et } y_{n+1} = y_n \text{ si } E(z_n) < 0 \text{ et } x_n \neq y_n, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = z_n \text{ si } E(z_n) = 0 \text{ et } x_n \neq y_n, \\ x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = z_n \text{ si } E(z_n) > 0 \text{ et } x_n \neq y_n. \end{array}\right.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'à chaque étape, la fonction E possède une racine x_* dans le segment $[x_n, y_n]$. De plus, il est permis d'imaginer que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vont converger vers cette racine à une vitesse plus rapide que la méthode de la dichotomie.

En fait, il est possible de vérifier que la méthode de la fausse position est bien définie et convergente sous les hypothèses qui assurent la définition et la convergence de la méthode de la sécante. Cependant, sous ces hypothèses, il est aussi possible d'établir qu'en général, la convergence est au moins géométrique, soit équivalente à celle de la méthode de la dichotomie. De plus, la méthode de la fausse position présente l'inconvénient d'une convergence seulement assurée autour de la racine x_* à déterminer, contrairement à la méthode de la dichotomie.