GRAVEJAT Philippe 30/6/22

L3

Chapitre III : Méthodes de calcul approché d'intégrales

Introduction

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point). Considérons une fonction f définie et continue sur le segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. Nous présentons dans ce chapitre des méthodes de quadrature qui fournissent une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Ces méthodes consistent à approcher la valeur de cette intégrale par une combinaison linéaire de valeurs de la fonction f de la forme $\sum_{j=0}^{N} \lambda_j f(\xi_j)$. Dans cette expression, les points $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$ appartiennent (en principe) au segment $[a,b]$, et les coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq N}$ sont des nombres réels, qui sont choisis de façon à ce que la combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{N} \lambda_j f(\xi_j)$ soit la plus proche possible de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ quelle que soit l'expression de la fonction f.

Les méthodes de quadrature élémentaires que nous présentons dans la suite obéissent à ce principe. Etant donnés des points $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$, la fonction f est approchée par son polynôme d'interpolation de Lagrange L_f aux points $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$, lequel est donné par la formule :

$$\forall x\in[a,b],\ L_f(x)=\sum_{j=0}^{N} f(\xi_j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{x-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right).$$

L'expression

$$\int_a^b L_f(x)\,dx=\sum_{j=0}^{N}\lambda_j f(\xi_j),\ \text{avec}\ \forall\, 0\leq j\leq N,\ \lambda_j=\int_a^b \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{x-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right)dx$$

donne une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Notons que cette formule de quadrature est en fait exacte lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

Les méthodes de quadrature composées que nous traitons dans la suite affinent ce procédé en appliquant le principe des sommes de Riemann. La formule de Chasles permet de décomposer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ suivant une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx,$$

puis la valeur de chacune des intégrales $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ est approchée suivant une méthode de quadrature élémentaire de la forme précédente. Le principal avantage des méthodes de quadrature composées réside dans la propriété que les combinaisons linéaires qui les définissent, forment des sommes de Riemann pour la subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Lorsque le pas de cette subdivision tend vers 0, les valeurs approchées ainsi obtenues convergent vers la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

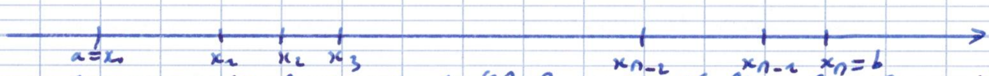
Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons plusieurs exemples de méthodes de quadrature élémentaires et composées, en particulier celles de Newton-Cotes. Nous établissons ensuite la convergence des méthodes de quadrature composées. Nous donnons aussi des estimations précises de l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, et les valeurs approchées données par chacune des méthodes de quadrature composées que nous introduisons. Nous concluons par la présentation et l'analyse des méthodes de Gauss qui utilisent les racines des polynômes orthogonaux.

I Méthodes de quadrature élémentaires et composées

Considérons un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et une fonction f définie et continue sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

1. Définitions et exemples

Afin de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, nous introduisons une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ du segment $[a, b]$:



Nous appliquons ensuite la formule de Chasles afin d'obtenir la décomposition :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Sur chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$, nous utilisons le changement de variables

$$x = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,y$$

afin d'obtenir la formule :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\int_{-1}^{1} f_i(y)\,dy,$$

et de nous ramener à une fonction :

$$\forall y \in [-1,1],\ f_i(y) = f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\,y\right),$$

qui est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$ qui nous servira de référence dans la suite.

Considérons donc une fonction g définie et continue sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles, et introduisons $N+1$ points, deux à deux distincts, $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$. La méthode de quadrature élémentaire associé aux points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ par l'intégrale $\int_{-1}^{1} L_g(y)\,dy$, où L_g est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction g aux points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$.

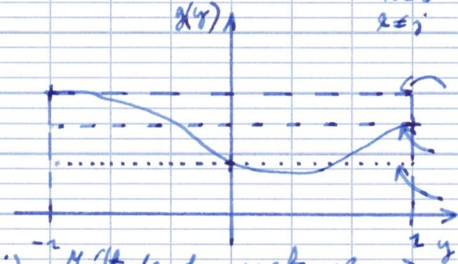
Déf : Soit $(\xi_j)_{0\le j\le N} \in [-1,1]^{N+1}$ tels que $\forall\, 0\le j\ne j'\le N$, $\xi_j \ne \xi_{j'}$. La méthode de quadrature élémentaire associé aux points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ consiste à approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ par l'expression :

$$\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j),$$

où :

$$\forall\, 0\le j\le N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\ k\ne j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy$$

Ex :



(i) Méthode des rectangles à gauche

Pour $\xi_0 = -1$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$$\sigma(g) = 2\,g(-1)$$

(ii) Méthode des rectangles à droite

Pour $\xi_0 = 1$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\,g(1)$

(iii) <u>Méthode du point milieu</u>

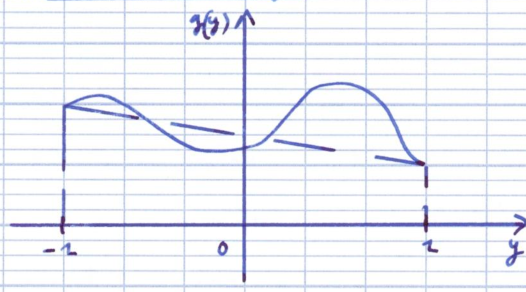
Pour $\xi_0 = 0$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\,g(0)$.

Les méthodes de Newton-Cotes (fermées) consistent à choisir des points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ équidistants dans le segment $[-1,1]$, soit de la forme :

$$\forall\, 0 \leq j \leq N,\quad \xi_j = -1 + \frac{2j}{N}.$$

<u>Ex</u> : (i) <u>Méthode des trapèzes</u>



Pour $N = 1$ et $(\xi_0, \xi_1) = (-1, 1)$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\left(\frac{1}{2} g(-1) + \frac{1}{2} g(1)\right)$

(ii) <u>Méthode de Simpson</u>

Pour $N = 2$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (-1, 0, 1)$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\left(\frac{1}{6} g(-1) + \frac{2}{3} g(0) + \frac{1}{6} g(1)\right)$

(iii) <u>Méthode de Boole-Villarceau</u>

Pour $N = 4$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\left(\frac{7}{90} g(-1) + \frac{16}{45} g(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{15} g(0) + \frac{16}{45} g(\frac{1}{2}) + \frac{7}{90} g(1)\right)$.

(iv) <u>Méthode de Weddle-Hardy</u>

Pour $N = 6$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6) = (-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(y)\,dy$ est approchée par :

$\sigma(g) = 2\left(\frac{41}{840} g(-1) + \frac{9}{35} g(-\frac{2}{3}) + \frac{9}{280} g(-\frac{1}{3}) + \frac{34}{105} g(0) + \frac{9}{280} g(\frac{1}{3}) + \frac{9}{35} g(\frac{2}{3}) + \frac{41}{840} g(1)\right)$

Les méthodes de quadrature composées associées à ces méthodes de quadrature élémentaires sont alors définies de la façon suivante.

Déf : Considérons une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ et $N+1$ points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$, deux à deux distincts. La méthode de quadrature composée associée à la subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ et aux points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ consiste à approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ par l'expression :

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi_j \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right),$$

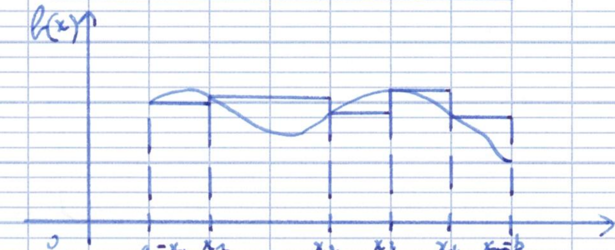
où :

$$\forall 0 \le j \le N, \ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy$$

Rem : (i) La méthode de quadrature composée de cette définition consiste donc à appliquer la méthode de quadrature élémentaire sur chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$ ramenés au segment $[-1,1]$ par le changement de variables : $x = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} + y\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$.

(ii) En pratique, il est permis de choisir des méthodes de quadrature élémentaires différentes sur chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$. Ce choix peut par exemple permettre de mieux approcher de possibles singularités de la fonction f.

Ex : (i) Méthode des rectangles à gauche



L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est approchée par :

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(x_i)$$

(ii) Méthode des rectangles à droite

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est approchée par :

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(x_{i+1})$$

(iii) Méthode du point milieu

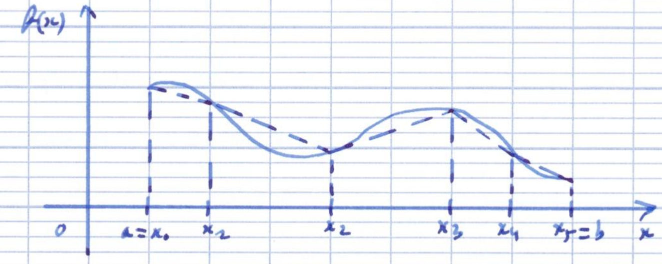
L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est approchée par :

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$$

(iv) Méthode des trapèzes

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est approchée par :

$$E(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{2} f(x_{i+1}) + \frac{1}{2} f(x_i)\right).$$



(v) Méthode de Simpson

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est approchée par :

$$E(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1})\right).$$

2. Convergence des méthodes de quadrature composées

La preuve de la convergence des méthodes de quadrature composées lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ repose sur le principe des sommes de Riemann.

a. Sommes de Riemann

Déf : Le pas h d'une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ est défini par

$$h = \max_{0 \le i \le n} |x_{i+1} - x_i|$$

Ex : Le pas h de la subdivision en $n+1$ points équidistants $\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)_{0 \le i \le n}$ du segment $[a,b]$ est égal à : $h = \frac{b-a}{n}$

Déf : Considérons une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ et n points $(t_i)_{0 \le i \le n-1}$ du segment $[a,b]$ tels que :

$\forall\, 0 \le i \le n-1,\ x_i \le t_i \le x_{i+1}$.

La somme de Riemann d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ pour la subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ et les points $(t_i)_{0 \le i \le n-1}$ est définie par :

$$S_{x,t}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f(t_i)$$

Ex : La valeur associée à la méthode du point milieu $E(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ est une somme de Riemann pour la subdivision $a = x_0 < \dots <$

$x_n = b$ et les points $\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)_{0\leq i\leq n-1}$.

Thm: Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Considérons les sommes de Riemann de la fonction associées à des subdivisions $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et des points $(t_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tels que :

$\forall\, 0\leq i\leq n-1,\ x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$, et notons h_x le pas de ces subdivisions.

Alors : $S_{x,t}(f) \underset{h_x\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx$

Dém: Par le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$:

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ t.q. $\forall (x,y)\in [a,b]^2,\ |x-y|\leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

En particulier, dès que $h_x \leq \delta$, par la relation de Chasles : $\left|S_{x,t}(f) - \int_a^b f(x)dx\right|$
$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t_i)-f(x))\,dx\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t_i)-f(x)|\,dx \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx$
$\leq \varepsilon$.

Ex: La valeur associée à la méthode du point milieu $\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\, f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ satisfait : $\mathcal{E}(f) \to \int_a^b f(x)dx$, lorsque le pas h de la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ tend vers 0.

b. Application à la convergence des méthodes de quadrature composées

Nous fixons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\leq j\leq n}$ du segment $[-1,1]$, et considérons des méthodes de quadrature composées sur le segment $[a,b]$ associées à la donnée de ces points et à des subdivisions $a=x_0<\ldots<x_n=b$ du segment $[a,b]$. Nous pouvons vérifier la convergence de ces méthodes lorsque le pas h_x des subdivisions considérées tend vers 0.

Thm: Considérons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$ du segment $[-1,1]$ et notons :

$\forall\, 0\leq j\leq N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy$.

Les méthodes de quadrature composées associées à ces points et à des subdivisions $a=x_0<\ldots<x_n=b$ du segment $[a,b]$:

$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\sum_{j=0}^{N}\lambda_j\, f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}+\xi_j\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$

satisfont :

$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \mathcal{E}(f) \to \int_a^b f(x)dx$,

lorsque le pas $h_x = \max_{0\leq i\leq n-1} |x_{i+1}-x_i|$ de ces subdivisions tend vers 0.

Dém: Lorsque la fonction g est constante égale à 1 sur le segment $[-1,1]$, le polynôme d'interpolation de Lagrange L_g de cette fonction aux points $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$ est égal à 1; par définition de la méthode de quadrature élémentaire σ, nous calculons : $\sum_{j=0}^{N} \lambda_j = \sigma(g) = \int_{-1}^{1} L_g(y)dy = 2$; nous calculons alors : $\Sigma(f) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda_j}{2} S_j(f)$, où les quantités $S_j(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi_j \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$ sont des sommes de Riemann; par le théorème précédent, nous concluons lorsque le pas h_x tend vers 0, que : $\Sigma(f) \xrightarrow[h_x\to 0]{} \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda_j}{2} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Rem: (i) La réduction du pas des subdivisions considérées, qui passe par l'augmentation du nombre $n+1$ de points considérés, améliore donc la précision du calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Ce n'est en général pas le cas lorsqu'on augmente le nombre $N+1$ de points des méthodes de quadrature sous-jacentes. Cette affirmation est reliée au phénomène de Runge et elle peut se justifier à l'aide du théorème de Banach-Steinhauss.

(ii) En pratique, il est aussi plus facile de modifier les subdivisions $x_0 = a < \dots < x_n = b$ que le choix des points $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$ des méthodes de quadrature élémentaires, dont la modification nécessite de calculer toujours plus de coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq N}$.

Le résultat de convergence du théorème précédent n'est vrai que dans la limite où les subdivisions considérées comptent une infinité de points, ce qui n'est bien sûr pas permis en pratique. Il est donc nécessaire d'estimer l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, et les valeurs approchées obtenues pour des subdivisions finies.

II Evaluation de l'erreur

Considérons un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et une fonction f définie et continue sur $[a,b]$, et à valeurs réelles.

1. Ordre d'une méthode de quadrature

<u>Déf</u>: Considérons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et $N+1$ coefficients $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ réels.

(i) La méthode de quadrature élémentaire $\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j)$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ ssi:

$$\begin{cases} \forall P \in \mathbb{R}_p[X], \quad \sigma(P) = \int_{-1}^{1} P(y)\,dy, \\ \text{et } \exists Q \in \mathbb{R}_{p+1}[X] \text{ t.q. } \sigma(Q) \neq \int_{-1}^{1} Q(y)\,dy. \end{cases}$$

(ii) Toute méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire d'ordre $p \in \mathbb{N}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$.

<u>Ex</u>: (i) Considérons la méthode des rectangles à gauche $\sigma(g) = 2\,g(-1)$. Comme $\forall Q = q \in \mathbb{R}_0[X]$, $\sigma(Q) = 2q = \int_{-1}^{1} Q(y)\,dy$, et $\sigma(X) = -2 \neq 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx$, cette méthode est d'ordre 0.

(ii) La méthode des rectangles à droite est aussi d'ordre 0, tandis que celle du point milieu est d'ordre 1.

<u>Thm</u>: Etant donnés $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et $N+1$ coefficients réels $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$, considérons la méthode de quadrature élémentaire $\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j)$.

(i) Si la méthode σ est d'ordre $p \geq N$, alors:

$$\forall 0 \le j \le N, \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy.$$

(ii) La méthode de quadrature élémentaire associée à ces coefficients est d'ordre: $p \geq N$.

<u>Dém</u>: (i) Considérons les polynômes de base de Lagrange

$$\forall 0\le j\le N, \quad \ell_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} \left(\frac{X-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right).$$

Comme ces polynômes sont de degré inférieur ou égal à $N \le p$, $\sigma(\ell_j) = \int_{-1}^{1} \ell_j(y)\,dy$; sachant que $\forall (j,k) \in \{0,\dots,N\}^2$, $\ell_j(\xi_k) = 1$ si $j=k$ et 0 sinon, $\sigma(\ell_j) = \lambda_j$

$$\Rightarrow \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy.$$

(ii) Lorsque $P \in \mathbb{R}_N[X]$, son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ est égal à $P \Rightarrow \sigma(P) = \int_{-1}^{1} P(y)\,dy$, d'où l'inégalité $p \geq N$.

<u>Rem</u>: Le premier point de ce théorème garantit que les méthodes de quadrature basées sur les polynômes d'interpolation de Lagrange sont d'ordre maximal. Ce sont

les méthodes les plus précises, ce qui explique que nous nous soyons (essentiellement) limités à leur étude.

__Ex:__ Soit $N \geq 1$. La méthode de Newton-Cotes (fermée) d'ordre N est d'ordre supérieur ou égal à N. Elle est d'ordre supérieur ou égal à $N+1$ lorsque N est pair.

__Dém:__ Par le théorème précédent, cette méthode est toujours d'ordre supérieur ou égal à N. Lorsque $N = 2n$ est pair, les points $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ associés à cette méthode satisfont:

$$\forall\, 0 \leq j \leq N,\ \xi_{N-j} = -1 + \frac{2}{N}(N-j) = 1 - \frac{2j}{N} = -\xi_j \Rightarrow \lambda_{N-j} = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq N-j}}^{N} dy \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_{N-j}-\xi_k}\right) \underset{l=N-k}{=} \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{N} \left(\frac{y+\xi_l}{-\xi_j+\xi_l}\right) dy \underset{z=-y}{=} \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{N} \left(-\frac{z-\xi_l}{\xi_j-\xi_l}\right) dz = (-1)^N \lambda_j = \lambda_j\,;$$

lorsque la fonction g est impaire: $\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j) \underset{j=N-k}{=} \sum_{k=0}^{N} \lambda_k\, g(-\xi_k) = -\sigma(g) \Rightarrow$

$\sigma(g) = 0 = \int_{-1}^{1} g(y)\,dy \Rightarrow \sigma(X^{N+1}) = 0 = \int_{-1}^{1} y^{N+1}\,dy \Rightarrow \forall\, \ell \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$,

$\sigma(\ell) = \int_{-1}^{1} \ell(y)\,dy \Rightarrow$ La méthode est d'ordre supérieur ou égal à $N+1$.

__Rem:__ (i) Il est possible de vérifier que la méthode de Newton-Cotes (fermée) d'ordre N est d'ordre N lorsque N est impair, et d'ordre $N+1$ lorsque N est pair.

(ii) Cette différence explique que seules les méthodes de Newton-Cotes (fermées) d'ordre pair sont utilisées en pratique.

__Ex:__ La méthode du trapèze est d'ordre 1, tandis que les méthodes de Simpson, de Boole-Villarceau et de Weddle-Hardy sont respectivement d'ordre 3, 5 et 7.

2. Evaluation de l'erreur d'une méthode de quadrature élémentaire

Fixons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0 \leq j \leq N}$ du segment $[-1,1]$ et considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j),$$

où $\forall\, 0 \leq j \leq N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy.$

__Déf:__ Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. L'erreur $E(g)$ due à la méthode de quadrature élémentaire σ pour la fonction g est définie par:

$$E(g) = \int_{-1}^{1} g(y)\,dy - \sigma(g) = \int_{-1}^{1} g(y)\,dy - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j).$$

__Ex:__ L'erreur associée à la méthode du point milieu (élémentaire) est égale à:

$$\forall\, g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}),\ E(g) = \int_{-1}^{1} g(y)\,dy - 2\,g(0) = \int_{-1}^{1} (g(y)-g(0))\,dy.$$

L'erreur due à une méthode de quadrature élémentaire s'évalue à l'aide du noyau de Peano de cette méthode.

Déf: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire 6 soit d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Le noyau de Peano K_p de cette méthode est défini par:

$$\forall y \in [-1,1],\quad K_p(y) = E(g_y),$$

où

$$\forall y \in [-1,1],\ \forall z \in [-1,1],\quad g_y(z) = (z-y)_+^p = \begin{cases} (z-y)^p & \text{si } z \geq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ex: Comme la méthode du point milieu est d'ordre 1, son noyau de Peano vaut:

$$\forall y \in [-1,1],\quad K_1(y) = E((\cdot - y)_+) = \int_{-1}^{1} (z-y)_+ \, dz - 2(-y)_+ = \int_y^1 (z-y)\, dz - 2y_- = \frac{1}{2}(1-y)^2 - 2y_- = \frac{1}{2}\left(1 - 2y_+ + 2y_- - 4y_- + y^2\right) = \frac{1}{2}(1-|y|)^2,$$

où nous avons noté $y_- = y_+ - y$ et utilisé l'égalité $|y| = y_+ + y_-$.

Le noyau de Peano permet d'exprimer l'erreur de la façon suivante.

Thm: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire 6 soit d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et notons K_p, son noyau de Peano. Si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[-1,1]$ alors, l'erreur $E(g)$ est égale à:

$$E(g) = \frac{1}{p!} \int_{-1}^{1} K_p(y)\, g^{(p+1)}(y)\, dy.$$

Dém: Elle repose sur la formule de Taylor avec reste intégral. Si g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[-1,1]$, alors: $\forall y \in [-1,1]$, $g(y) = \sum_{k=0}^{p} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} y^k + \frac{1}{p!}\int_{-1}^{1} (y-z)_+^p \, g^{(p+1)}(z)\,dz$; sachant que l'erreur E dépend linéairement de g et qu'elle est nulle pour un polynôme de degré inférieur ou égal à p : $E(g) = E\left(\frac{1}{p!}\int_{-1}^{1} (\cdot - z)_+^p \, g^{(p+1)}(z)\,dz\right)$, d'où par la formule de Fubini, $E(g) = \frac{1}{p!}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} (y-z)_+^p\,dy - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j (s_j - z)_+^p\right) g^{(p+1)}(z)\,dz = \frac{1}{p!}\int_{-1}^{1} K_p(z)\, g^{(p+1)}(z)\,dz$.

Ex: Lorsque $g \in \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$, l'erreur $E(g)$ pour la méthode du point milieu vaut: $E(g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-|y|)^2 g''(y)\,dy$.

Cor: Supposons que la méthode de quadrature élémentaire 6 soit d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et notons K_p, son noyau de Peano.

(i) $\forall g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1,1],\mathbb{R})$, $|E(g)| \leq \left(\frac{1}{p!}\int_{-1}^{1}|K_p(y)|\,dy\right)\|g^{(p+1)}\|_\infty$.

(ii) Supposons que le noyau de Peano K_p garde un signe constant sur le segment $[-1,1]$. Etant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1,1],\mathbb{R})$, il existe un point $\xi \in [-1,1]$ tel que :

$$E(g) = \frac{1}{p!}\, g^{(p+1)}(\xi)\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy$$
$$= \frac{1}{(p+1)!}\, g^{(p+1)}(\xi)\, E(X^{p+1}).$$

Dém: (i) Par définition de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$ et le théorème précédent.

(ii) Soit $m = \min_{x\in[-1,1]} g^{(p+1)}(x)$ et $M = \max_{x\in[-1,1]} g^{(p+1)}(x)$. Comme K_p est de signe constant sur $[-1,1]$, par le théorème précédent, $\frac{m}{p!}\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy \leq E(g) \leq \frac{M}{p!}\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy$ si $K_p \geq 0$ sur $[-1,1]$, $\frac{M}{p!}\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy \leq E(g) \leq \frac{m}{p!}\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy$ si $K_p \leq 0$ sur $[-1,1]$; si $\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy = 0$, la conclusion est vraie ; sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que $g^{(p+1)}(\xi) = \frac{p!\,E(g)}{\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy}$, d'où la première formule ; comme $(X^{p+1})^{(p+1)} = (p+1)!$, $E(X^{p+1}) = \frac{(p+1)!}{p!}\int_{-1}^{1}K_p(y)\,dy \Rightarrow E(g) = \frac{1}{(p+1)!}\,g^{(p+1)}(\xi)\,E(X^{p+1})$.

Ex: (i) Méthode du point milieu

Comme le noyau de Peano K_1 est égal à : $\forall t\in[-1,1]$, $K_1(t) = \frac{1}{2}(1-|t|)^2 \geq 0$, $\forall g \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$, $\exists \xi \in [-1,1]$ t.q. $E(g) = g''(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-|t|)^2\,dt = \frac{g''(\xi)}{3}$ $\Rightarrow |E(g)| \leq \frac{1}{3}\|g''\|_\infty$.

(ii) Méthode des trapèzes

Rappelons que cette méthode est d'ordre égal à 1. De plus, son noyau de Peano vaut : $\forall t\in[-1,1]$, $K_1(t) = -\frac{1}{2}(1-t^2) \leq 0$, d'où : $\forall g \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$, $\exists \xi \in [-1,1]$ t.q. $E(g) = -g''(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt = -\frac{2}{3}g''(\xi) \Rightarrow |E(g)| \leq \frac{2}{3}\|g''\|_\infty$.

(iii) Méthode de Simpson

Rappelons que cette méthode est d'ordre égal à 3. Sachant que son noyau de Peano vaut : $\forall t\in[-1,1]$, $K_3(t) = -\frac{1}{12}(1-|t|^3)(1+3|t|) \leq 0$, l'erreur associé à une fonction $g \in \mathcal{C}^4([-1,1],\mathbb{R})$ s'évalue par : $\exists \xi \in [-1,1]$ tel que $E(g) = -\frac{1}{90}g^{(4)}(\xi) \Rightarrow |E(g)| \leq \frac{1}{90}\|g^{(4)}\|_\infty$.

Rem: Le théorème de Steffensen assure que les noyaux de Peano des méthodes de Newton-Cotes (fermées) gardent un signe constant, de sorte que le point (ii) du corollaire précédent s'applique à ces méthodes.

3. Evaluation de l'erreur d'une méthode de quadrature composée

Fixons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j g(\xi_j),$$

où $\forall\, 0\le j\le N$, $\lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy$. Fixons également une subdivision $a = x_0 < \dots < x_M = b$ du segment $[a,b]$ et notons $h = \max_{0\le i\le M-1} |x_{i+1}-x_i|$ le pas de cette subdivision.

Considérons enfin la méthode de quadrature composée

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi_j \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right),$$

et cherchons à évaluer l'erreur $\mathcal{E}$ associée à cette méthode de quadrature composée.

Déf: Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. L'erreur $\mathcal{E}(f)$ due à la méthode de quadrature composée Σ pour la fonction f est définie par:

$$\mathcal{E}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \Sigma(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi_j \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$$

Ex: L'erreur associée à la méthode des rectangles à gauche (composée) est égale à:

$$\forall f\in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\quad \mathcal{E}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{M-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(x_i) = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(x)-f(x_i)\big)\,dx$$

Comme pour la méthode de quadrature élémentaire σ, cette erreur s'évalue à l'aide du noyau de Peano de la méthode de quadrature composée.

Déf: Supposons que la méthode de quadrature composée Σ est d'ordre $p\in\mathbb{N}$. Le noyau de Peano $\mathcal{K}_p$ de cette méthode est défini par:

$$\forall x\in[a,b],\quad \mathcal{K}_p(x) = \mathcal{E}(f_x),$$

où

$$\forall x\in[a,b],\ \forall y\in[a,b],\quad f_x(y) = (y-x)_+^p = \begin{cases} (y-x)^p & \text{si } y\ge x,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ex: Comme la méthode des rectangles à gauche est d'ordre 0, son noyau de Peano vaut:

$$\forall x\in[a,b],\quad \mathcal{K}_0(x) = \mathcal{E}\left((\cdot-x)_+^0\right) = \int_a^b (y-x)_+^0\,dy - \sum_{i=0}^{M-1} (x_{i+1}-x_i)(x_i-x)_+^0 =$$

$$\int_x^b dy - \sum_{\substack{i=0 \\ x_i \geq x}}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_{i_*} - x, \text{ où } 1 \leq i_* \leq n-1 \text{ tel que } x_{i_*} \geq x \geq x_{i_*-1}$$

<u>Thm</u>: Supposons que la méthode de quadrature composée $\mathcal{E}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et notons $\mathcal{K}_p$ son noyau de Peano. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur le segment $[a,b]$, alors l'erreur $\mathcal{E}(f)$ est égale à :

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{p!} \int_a^b \mathcal{K}_p(x)\, f^{(p+1)}(x)\, dx.$$

<u>Dém</u>: Elle est identique à celle dans le cas des méthodes de quadrature élémentaire.

<u>Ex</u>: Lorsque $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, l'erreur $\mathcal{E}(f)$ pour la méthode des rectangles à gauche vaut : $\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, f'(x)\, dx$.

<u>Cor</u>: Supposons que la méthode de quadrature composée $\mathcal{E}$ soit d'ordre $p \in \mathbb{N}$, et notons $\mathcal{K}_p$ son noyau de Peano.

(i) $\forall f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b], \mathbb{R})$, $|\mathcal{E}(f)| \leq \left(\frac{1}{p!} \int_a^b |\mathcal{K}_p(x)|\, dx\right) \|f^{(p+1)}\|_\infty$.

(ii) Supposons que le noyau de Peano $\mathcal{K}_p$ garde un signe constant sur le segment $[a,b]$. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b], \mathbb{R})$, il existe un point $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{p!} f^{(p+1)}(\xi) \int_a^b \mathcal{K}_p(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)\, E(X^{p+1}).$$

<u>Dém</u>: Elle est identique à celle dans le cas des méthodes de quadrature élémentaire.

<u>Ex</u>: Comme le noyau de Peano de la méthode des rectangles à gauche est de signe positif, $\forall f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, $\exists \xi \in [a,b]$ tel que : $\mathcal{E}(f) = f'(\xi) \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, dx$

$$= f'(\xi) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \Rightarrow |\mathcal{E}(f)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \|f'\|_\infty \leq \frac{h(b-a)}{2} \|f'\|_\infty$$

Il est utile de relier les noyaux de Peano K_p et $\mathcal{K}_p$ des méthodes de quadrature élémentaires et composées.

<u>Lem</u>: Supposons que les méthodes de quadrature élémentaire 6 et composée $\mathcal{E}$ sont d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et notons K_p, respectivement $\mathcal{K}_p$, leur noyau de Peano. Alors :

$$\forall\, 0 \leq i \leq n-1,\ \forall \xi \in [-1,1],\ \mathcal{K}_p\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^{p+1} K_p(\xi).$$

<u>Dém</u>: Soit $0 \leq i \leq n-1$ et $\xi \in [-1,1]$. Par définition, $\mathcal{K}_p\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)$

$$= \int_a^b \left(y - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)_+^p dy - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{x_{l+1} - x_l}{2} \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \left(\frac{x_{l+1} + x_l}{2} + \xi_j \frac{x_{l+1} - x_l}{2} - \frac{x_{i+1} + x_i}{2} - \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)_+^p = \sum_{l=i}^{n-1} \left\{ \int_{x_l}^{x_{l+1}} \left(y - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \xi \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)_+^p dy\right.$$

$- \frac{x_{l+1}-x_l}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \left(\frac{x_{l+1}+x_l}{2} + \xi_j \frac{x_{l+1}-x_l}{2} - \frac{x_{i+1}+x_i}{2} - \xi \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)_+^p \Big\}$; lorsque $l > i$, le terme correspondant de la somme précédente est l'erreur pour une fonction polynôme de degré p ; comme la méthode de quadrature est d'ordre p, ce terme est nul, d'où : $\mathcal{H}_p \left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} + \xi \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dy \left(y - \frac{x_i+x_{i+1}}{2} - \xi \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)_+^p - \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j (\xi_j - \xi)_+^p = \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} \Big\{ \int_{-1}^{1} (t-\xi)_+^p \, dt - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j (\xi_j - \xi)_+^p \Big\} = \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} K_p(\xi)$. $y = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} + t \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$

Cor: Supposons que la méthode de quadrature composée $\mathcal{E}$ est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ et notons K_p le noyau de Peano de la méthode de quadrature élémentaire ε.

(i) $\forall f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b], \mathbb{R})$, $|\mathcal{E}(f)| \leq \frac{h^{p+1}(b-a)}{2^{p+1} p!} \left(\int_{-1}^{1} |K_p(y)| \, dy \right) \| f^{(p+1)} \|_\infty$

(ii) Supposons que le noyau de Peano K_p garde un signe constant sur le segment $[-1,1]$. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b], \mathbb{R})$, il existe un point $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\mathcal{E}(f) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{2^{p+1} p!} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)^{p+1} \int_{-1}^{1} K_p(y) \, dy$$
$$= \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{2^{p+1} (p+1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)^{p+1} \, \mathcal{E}(X^{p+1}).$$

Dém: (i) Par le lemme précédent, $\int_a^b |\mathcal{H}_p(x)| \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\mathcal{H}_p(x)| \, dx \overset{x = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi \frac{x_{i+1}-x_i}{2}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \int_{-1}^{1} \left| \mathcal{H}_p \left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right) \right| d\xi = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} \int_{-1}^{1} |K_p(y)| \, dy$, d'où, par les énoncés précédents, $|\mathcal{E}(f)| \leq \frac{1}{p! \, 2^{p+1}} \left(\int_{-1}^{1} |K_p(y)| \, dy \right) \| f^{(p+1)} \|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} \leq \frac{h^{p+1}(b-a)}{2^{p+1} p!} \left(\int_{-1}^{1} |K_p(y)| \, dy \right) \| f^{(p+1)} \|_\infty$.

(ii) De même, $\int_a^b \mathcal{H}_p(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^{p+1} \int_{-1}^{1} K_p(y) \, dy$, d'où les deux formules recherchées pour la valeur de $\mathcal{E}(f)$.

Rem: Lorsque le pas h tend vers 0, l'erreur est d'autant plus faible que l'ordre p de la méthode de quadrature composée $\mathcal{E}$ est grand. Les méthodes d'ordre élevé sont donc plus précises (au moins lorsqu'elles sont appliquées à des fonctions régulières), mais leur mise en pratique peut s'avérer plus délicate.

Ex: (i) <u>Méthode du point milieu</u>

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$, alors : $\exists \, \xi \in [a,b]$ t.q.

$$\mathcal{E}(f) = \frac{f''(\xi)}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^3 \Rightarrow |\mathcal{E}(f)| \leq \frac{h^2(b-a)}{24} \| f'' \|_\infty.$$

(ii) <u>Méthode des trapèzes</u>

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$, alors : $\exists \, \xi \in [a,b]$ t.q.

$$\mathcal{E}(f) = -\frac{2f''(\xi)}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \right)^3 \Rightarrow |\mathcal{E}(f)| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \| f'' \|_\infty.$$

(iii) Méthode de Simpson

Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur le segment $[a,b]$, alors: $\exists \xi \in [a,b]$ t.q.

$$\mathcal{E}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^5 \Rightarrow |\mathcal{E}(f)| \leq \frac{h^4(b-a)}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty .$$

4. Influence des erreurs d'arrondis

Fixons $N+1$ points deux à deux disjoints $(\xi_j)_{0\leq j\leq N}$ du segment $[-1,1]$ et considérons la méthode de quadrature élémentaire:

$$\sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j g(\xi_j),$$

où $\forall 0 \leq j \leq N$, $\lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right) dy$. Fixons également une subdivision $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ et intéressons-nous à la méthode de quadrature composée:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + \xi_j \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right).$$

Les calculs associés à cette méthode sont en pratique entachés d'erreurs d'arrondis. Si nous supposons que les erreurs d'arrondis sur le calcul d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ sont au plus de l'ordre de $\delta > 0$, l'erreur commise dans le calcul de $\mathcal{S}(f)$ s'estime par la quantité:

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|.$$

Lorsque les coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq N}$ ont tous même signe (donc sont de signe positif), cette quantité est égale à:

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j = \delta \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) = \delta(b-a),$$

puisque $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 2$. L'erreur totale ainsi commise est donc de l'ordre de l'erreur d'arrondi δ, soit très faible. Ce n'est plus le cas lorsque les coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq N}$ sont de signes différents, puisque l'erreur est alors multipliée par la somme $\sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|$, qui peut s'avérer très grande en pratique. Afin de contrôler les erreurs d'arrondis, il est donc préférable que tous les coefficients $(\lambda_j)_{0\leq j\leq N}$ soient tous positifs. C'est le cas des diverses méthodes que nous avons évoquées jusqu'ici (méthodes des rectangles à gauche et à droite, du point milieu, des trapèzes, de Simpson, de Boole-Villarceau et de Weddle-Hardy). Mais ce n'est plus le cas des méthodes de Newton-Cotes (fermées) d'ordre supérieur ou égal à 8, ce qui explique qu'elles ne soient que peu utilisées.

III Méthode de Gauss

Considérons $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et $N+1$ coefficients réels $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$. Nous avons établi que la méthode de quadrature élémentaire $\sigma(g)=\sum_{j=0}^{N}\lambda_j\, g(\xi_j)$ est d'ordre optimal, supérieur ou égal à N, lorsque les coefficients $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ sont égaux à :

$$\forall\, 0\le j\le N,\ \lambda_j=\int_{-1}^{1}\prod_{\substack{k=0\\k\ne j}}^{N}\left(\frac{y-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right)dy.$$

Sachant qu'une méthode de quadrature est d'autant plus précise que son ordre est élevé, il est naturel de se demander s'il existe un choix des points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ tel que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ soit maximal. A l'aide de la théorie des polynômes orthogonaux, il est possible de résoudre cette question, ce qui conduit à l'introduction des méthodes de Gauss.

1. Principe et exemples

Considérons une fonction poids $w\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall y\in[-1,1],\ w(y)>0,$$

et introduisons l'espace euclidien ou pré-hilbertien E défini par :

$$E=\left\{g\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{-1}^{1} g(y)^2\, w(y)\,dy<+\infty\right\},$$

et muni du produit scalaire :

$$\forall (g,h)\in E^2,\ \langle g,h\rangle_E=\int_{-1}^{1} g(y)\,h(y)\,w(y)\,dy.$$

Notons $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux associés à l'espace E et rappelons que, quel que soit l'entier $n\ge 1$, le polynôme ℓ_n a exactement n racines deux à deux distinctes $(y_j^{(n)})_{0\le j\le n-1}$ qui appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.
Notre but est désormais d'étudier les méthodes de quadrature élémentaire de la forme

$$\sigma(g)=\sum_{j=0}^{N}\lambda_j\, g(\xi_j)$$

où $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ sont des points deux à deux distincts du segment $[-1,1]$ et $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ sont des coefficients réels, qui approchent au mieux l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} g(y)\,w(y)\,dy$$

d'une fonction $g\in\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Cette étude généralise ainsi le cas où

$$\forall y \in [-1,1],\ w(y) = 1,$$

que nous avons étudié jusqu'ici. Notre but principal est de déterminer les nombres $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ et les coefficients $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ afin que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ soit maximal au sens suivant.

__Déf__: Fixons une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall y \in [-1,1],\ w(y)>0$. Etant donnés $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et $N+1$ coefficients réels $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$, considérons la méthode de quadrature élémentaire :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}),\ \sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j).$$

Cette méthode est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ par rapport au poids w ssi :

$$\text{Et}\begin{cases} \forall P \in \mathbb{R}_p[X],\ \sigma(P) = \int_{-1}^{1} P(y)\, w(y)\, dy, \\ \exists Q \in \mathbb{R}_{p+1}[X] \text{ t.q. } \sigma(Q) \neq \int_{-1}^{1} Q(y)\, w(y)\, dy. \end{cases}$$

__Ex__: Les méthodes des rectangles à gauche et à droite sont d'ordre 0 pour le poids $w=1$, tandis que la méthode du point milieu est d'ordre 1 pour ce poids.

__Rem__: L'ordre ainsi défini dépend du choix de la fonction poids w. Une méthode d'ordre élevé pour un choix de ce poids peut avoir un ordre très mauvais pour un autre poids.

__Ex__: Soit $\forall x \in [-1,1]$, $w(x) = \frac{1}{2}$ si $x \le 0$, et $2x + \frac{1}{2}$ si $x \geq 0$. Comme $\forall Q = q \in \mathbb{R}_0[X]$, $\int_{-1}^{1} Q(y)\, w(y)\, dy = 2q = 2\, Q(0)$, et $\int_{-1}^{1} y\, w(y)\, dy = \frac{2}{3} \neq 0$, la méthode du point milieu est d'ordre 0 pour le poids w.

Avec cette définition, nous pouvons maintenant introduire les méthodes de Gauss.

__Thm__: Fixons une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall y \in [-1,1],\ w(y) > 0$. Etant donnés $N+1$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ du segment $[-1,1]$ et $N+1$ coefficients réels $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$, considérons la méthode de quadrature élémentaire :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}),\ \sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(\xi_j).$$

(i) L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ par rapport au poids w est inférieur ou égal à $2N+1$.

(ii) Il existe un unique choix des points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ et des coefficients $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ tels que la méthode σ soit exactement d'ordre $2N+1$. Les points $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ sont les racines $\left(y_j^{(N+1)}\right)_{0\le j\le N}$ du polynôme orthogonal P_{N+1} et les coefficients $(\lambda_j)_{0\le j\le N}$ sont égaux à :

$$\forall\, 0\le j\le N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y-y_k^{(N+1)}}{y_j^{(N+1)}-y_k^{(N+1)}}\right) w(y)\,dy.$$

La méthode de quadrature élémentaire ainsi définie s'appelle la méthode de Gauss d'ordre N par rapport au poids w.

Dém: (i) Supposons que la méthode de quadrature élémentaire σ soit d'ordre supérieur ou égal à $2N+1$ par rapport au poids w, et considérons le polynôme $Q_{N+1} = \prod_{j=0}^{N} (X-\xi_j)$; si $P\in \mathbb{R}_N[X]$, alors, $d^\circ(PQ_{N+1}) \le 2N+1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P(y)Q_{N+1}(y)w(y)\,dy = \sigma(PQ_{N+1}) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j P(\xi_j)Q_{N+1}(\xi_j) = 0 \Rightarrow Q_{N+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_N[X]$; comme Q_{N+1} est unitaire, $Q_{N+1} = P_{N+1} \Rightarrow$ Les nombres $(\xi_j)_{0\le j\le N}$ sont égaux aux racines $\left(y_j^{(N+1)}\right)_{0\le j\le N}$ de P_{N+1} ; comme $\forall\, 0\le j\le N$, $d^\circ\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{X-y_k^{(N+1)}}{y_j^{(N+1)}-y_k^{(N+1)}}\right)\right) \le N$, $\lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{y-y_k^{(N+1)}}{y_j^{(N+1)}-y_k^{(N+1)}}\right)$,

(ii) Montrons alors que l'ordre de cette méthode est supérieur ou égal à $2N+1$; par le théorème de la division euclidienne, si $P\in\mathbb{R}_{2N+1}[X]$, alors, il existe $Q\in\mathbb{R}_N[X]$ et $R\in\mathbb{R}_N[X]$ tels que : $P = QP_{N+1}+R$; comme $d^\circ(Q)\le N$, $\int_{-1}^{1} Q(y)P_{N+1}(y)w(y)\,dy = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P(y)w(y)\,dy = \int_{-1}^{1} R(y)w(y)\,dy$; comme $\sigma(QP_{N+1}) = 0$, par linéarité, $\sigma(P) = \sigma(R)$; comme $d^\circ(R)\le N$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction R aux points $\left(y_j^{(N+1)}\right)_{0\le j\le N}$ est égal à R, c'est-à-dire : $R = \sum_{j=0}^{N} R\left(y_j^{(N+1)}\right) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{X-y_k^{(N+1)}}{y_j^{(N+1)}-y_k^{(N+1)}}\right) \Rightarrow \int_{-1}^{1} R(y)w(y)\,dy = \sum_{j=0}^{N}\lambda_j R\left(y_j^{(N+1)}\right) = \sigma(R) \Rightarrow \int_{-1}^{1} P(y)w(y)\,dy = \sigma(P) \Rightarrow$ L'ordre de la méthode σ par rapport au poids w est supérieur ou égal à $2N+1$.

(iii) Comme $\sigma(P_{N+1}^2) = 0$ et $\int_{-1}^{1} P_{N+1}(y)^2 w(y)\,dy > 0$, l'ordre de cette méthode par rapport au poids w est exactement égal à $2N+1$, d'où le théorème.

Ex: Lorsque $\forall y\in[-1,1]$, $w(y) = 1$, les polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de Legendre $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à des coefficients multiplicatifs près, puisque les polynômes de Legendre $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis de manière classique par les formules de récurrence :

$L_0 = 1$, $L_1 = X$ et $\forall n \geq 1$, $L_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} X L_n - \frac{n}{n+1} L_{n-1}$

(qui n'en sont pas des polynômes unitaires). La méthode de quadrature élémentaire associée est la méthode de Gauss-Legendre. Pour $N = 0$, il s'agit de la méthode du point milieu.

Rem: Les définitions et le théorème précédents se généralisent à une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0(]-1,1[, \mathbb{R})$ telle que $\forall y \in]-1,1[$, $w(y) > 0$ et $\int_{-1}^{1} w(y)\,dy < +\infty$. Notons en particulier que dans ce cas l'espace euclidien ou pré-hilbertien E est égal à l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et contient donc l'espace des fonctions polynômes $\mathbb{R}[X]$. En fait, il est même possible de généraliser ces énoncés à des intervalles quelconques sous des hypothèses à préciser.

Ex: Rappelons que la fonction w définie par $\forall y \in]-1,1[$, $w(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ est définie, continue, strictement positive et intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$. Les polynômes orthogonaux $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associés à cette fonction poids sont les polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par les formules de récurrence :

$T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \geq 1$, $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$,

(à des coefficients multiplicatifs près comme dans le cas précédent des polynômes de Legendre). La méthode de quadrature élémentaire σ_T associée est la méthode de Gauss-Tchebychev, dont la formule est explicitement donnée par :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}),\ \sigma_T(g) = \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=0}^{N} g\left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}\right)\right),$$

et qui approche l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{g(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^{\pi} g(\cos(\theta))\,d\theta$.

Comme toute méthode de quadrature élémentaire, les méthodes de Gauss peuvent s'utiliser de manière composée. Dans ce cadre, il s'avère intéressant en terme de temps de calcul de fixer les bornes de chaque segment de la subdivision comme points de la méthode de quadrature élémentaire. La valeur calculée pour la fonction à intégrer en ces points pourra servir dans le calcul de la valeur de la méthode de quadrature élémentaire de deux segments successifs. Cette idée conduit à l'énoncé suivant.

Thm: Fixons une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall y \in [-1,1]$, $w(y) > 0$.

Étant donnés $N-1 \geq 0$ points deux à deux distincts $(\xi_j)_{1 \leq j \leq N-1}$ de l'intervalle $]-1,1[$ et $N+1$ coefficients réels $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$, considérons la méthode de quadrature élémentaire :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}),\ \sigma(g) = \lambda_0\, g(-1) + \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j\, g(\xi_j) + \lambda_N\, g(1)$$

(i) L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ par rapport au poids w est inférieur ou égal à $2N-1$.

(ii) Il existe un unique choix des points $(\xi_j)_{1 \leq j \leq N-1}$ et des coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ tels que la méthode σ soit d'ordre exactement $2N-1$. Les points $(\xi_j)_{1 \leq j \leq N-1}$ sont les racines $(r_j^{(N-1)})_{1 \leq j \leq N-1}$ du polynôme orthogonal Q_{N-1} pour le poids ω défini par :

$$\forall y \in]-1,1[,\ \omega(y) = (1-y^2)\, w(y)$$

et les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ sont égaux à :

$$\forall 0 \leq j \leq N,\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} w(y) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N} \left(\frac{y - r_k^{(N-1)}}{r_j^{(N-1)} - r_k^{(N-1)}}\right) dy$$

où nous avons noté $r_0^{(N-1)} = -1$ et $r_N^{(N-1)} = 1$.

Dém : (i) Rappelons d'abord que les polynômes orthogonaux $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définis, puisque la fonction ω est continue et strictement positive sur $]-1,1[$. Supposons alors que la méthode de quadrature élémentaire σ soit d'ordre supérieur ou égal à $2N-1$ et notons $R_{N-1} = \prod_{j=1}^{N-1} (X - \xi_j)$; si $P \in \mathbb{R}_{N-2}[X]$, alors, $d^\circ((1-X^2) P R_{N-1}) \leq 2N-1$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P(y)\, R_{N-1}(y)(1-y^2)\, w(y)\, dy = \sigma((1-X^2) P R_{N-1}) = 0 \Rightarrow R_{N-1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{N-2}[X]$ pour le produit scalaire défini à partir du poids ω ; comme R_{N-1} est unitaire, $R_{N-1} = Q_{N-1}$, et les nombres $(\xi_j)_{1 \leq j \leq N-1}$ sont égaux aux racines $(r_j^{(N-1)})_{1 \leq j \leq N-1}$; comme $\forall 0 \leq j \leq N$, $d^\circ\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{X - r_k^{(N-1)}}{r_j^{(N-1)} - r_k^{(N-1)}}\right)\right) \leq N \leq 2N-1$, $\lambda_j = \int_{-1}^{1} w(y) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N}\left(\frac{y - r_k^{(N-1)}}{r_j^{(N-1)} - r_k^{(N-1)}}\right) dy$.

(ii) Comme $\sigma(Q_{N-1}^2(1-X^2)) = 0$ et $\int_{-1}^{1} Q_{N-1}^2(y)(1-y^2)\, w(y)\, dy > 0$, l'ordre de cette méthode par rapport au poids w est inférieur ou égal à $2N-1$; de plus, si $P \in \mathbb{R}_{2N-1}[X]$, alors, par le théorème de la division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}_{N-2}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_N[X]$ tels que $P = Q\, Q_{N-1}(1-X^2) + R$; comme $d^\circ(Q) \leq N-2$, $\int_{-1}^{1} Q(y)\, Q_{N-1}(y)(1-y^2)\, w(y)\, dy = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P(y)\, w(y)\, dy = \int_{-1}^{1} R(y)\, w(y)\, dy$; comme $\sigma(Q\, Q_{N-1}(1-X^2)) = 0$, par linéarité, $\sigma(P) = \sigma(R)$; comme $d^\circ(R) \leq N$, son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(r_j^{(N-1)})_{0 \leq j \leq N}$ est égal à lui-même, ce qui assure que : $\int_{-1}^{1} R(y)\, w(y)\, dy = \sigma(R)$, puisque :

$\int_{-1}^{1} \ell(y) w(y)\, dy = \sigma(\ell) \Rightarrow$ L'ordre de la méthode σ par rapport au poids w est exactement égal à $2N-1$.

<u>Ex:</u> Lorsque $\forall y \in [-1,1]$, $w(y) = 1$, cette méthode de quadrature élémentaire s'appelle la méthode de Gauss-Lobatto. Pour $N=1$, il s'agit de la méthode des trapèzes, et pour $N=2$, de la méthode de Simpson.

<u>Rem:</u> Appliquer une méthode de Gauss-Legendre composée dont l'ordre est égal à $2N+1$ sur les $n-1$ segments d'une subdivision nécessite $(n-1)(N+1)$ évaluations de la fonction à intégrer, tandis qu'appliquer une méthode de Gauss-Lobatto composé dont l'ordre est égal à $2N+1$ sur les $n-1$ segments de cette subdivision requiert $n+(n-1)N = (n-1)(N+1)+1$ évaluations de cette fonction. Le coût de ces deux méthodes à précision identique est donc équivalent malgré l'ordre a priori moins élevé des méthodes de Gauss-Lobatto.

2. Evaluation de l'erreur d'une méthode de Gauss

Considérons comme avant une fonction poids $w \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall y \in [-1,1], w(y) > 0$. Introduisons l'espace euclidien ou préhilbertien $E = \{ g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_{-1}^{1} g(x)^2 w(x)\, dx < +\infty \}$ muni du produit scalaire : $\forall (g,h) \in E^2$, $\langle g, h \rangle_E = \int_{-1}^{1} g(y) h(y) w(y)\, dy$. Notons ℓ_{N+1} le polynôme orthogonal associé à l'espace E de degré $N+1$ et $(z_j)_{0 \leq j \leq N}$ ses $N+1$ racines deux à deux distinctes. Considérons enfin la méthode de quadrature élémentaire de Gauss :

$$\forall g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}), \quad \sigma(g) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(z_j),$$

$$\text{où } \forall\, 0 \leq j \leq N, \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} \left(\frac{y - z_k}{z_j - z_k} \right) w(y)\, dy.$$

Nous cherchons à évaluer l'erreur associée à cette méthode que nous définissons de la façon suivante.

<u>Déf:</u> Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. L'erreur $E(g)$ due à la méthode de Gauss pour la fonction g est définie par :

$$E(g) = \int_{-1}^{1} g(y) w(y)\, dy - \sigma(g) = \int_{-1}^{1} g(y) w(y)\, dy - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, g(z_j).$$

Cette erreur s'estime à l'aide du noyau de Peano K_{2N+2} de la méthode de Gauss.

<u>Déf:</u> Le noyau de Peano K_{2N+2} de la méthode de Gauss est défini par:

$$\forall y \in [-1,1],\ K_{2N+2}(y) = E(g_y),$$

où:

$$\forall y \in [-1,1],\ \forall z \in [-1,1],\ g_y(z) = (z-y)_+^{2N+2} \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} (z-y)^{2N+2} & \text{si } z \geq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Thm:</u> Si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^{2N+2}$ sur le segment $[-1,1]$, alors, l'erreur $E(g)$ de la méthode de Gauss est égale à:

$$E(g) = \frac{1}{(2N+2)!} \int_{-1}^{1} K_{2N+2}(y)\, g^{(2N+2)}(y)\, dy.$$

<u>Dém:</u> La preuve est identique à celle du cas général.

<u>Cor:</u> Si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^{2N+2}$ sur le segment $[-1,1]$, alors, l'erreur $E(g)$ de la méthode de Gauss vérifie:

$$|E(g)| \leq \left(\frac{1}{(2N+2)!} \int_{-1}^{1} |K_{2N+2}(y)|\, dy \right) \| g^{(2N+2)} \|_\infty.$$

<u>Dém:</u> Par définition de la norme $\| \ \|_\infty$ et le théorème précédent.

<u>Rem:</u> Il est possible de vérifier que le noyau de Peano K_{2N+2} d'une méthode de Gauss est positif, d'où le corollaire suivant.

<u>Cor:</u> Etant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^{2N+2}([-1,1], \mathbb{R})$, il existe un point $\xi \in [-1,1]$ tel que:

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{(2N+2)!} g^{(2N+2)}(\xi) \int_{-1}^{1} K_{2N+2}(y)\, dy \\ &= \frac{1}{(2N+2)!} g^{(2N+2)}(\xi)\, E(X^{2N+2}) \\ &= \frac{1}{(2N+2)!} g^{(2N+2)}(\xi) \int_{-1}^{1} \ell_{N+1}(y)^2\, w(y)\, dy \end{aligned}$$

<u>Dém:</u> Les deux premières égalités se montrent dans le cas général. Pour la troisième, sachant que $\ell_{N+1}{}^2$ est de degré $2N+2$ et unitaire, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{2N+1}(X)$ tel que $X^{2N+2} = \ell_{N+1}{}^2 + Q$; par linéarité, $E(X^{2N+2}) = E(\ell_{N+1}^2) + E(Q) = E(\ell_{N+1}^2) = \int_{-1}^{1} \ell_{N+1}(y)^2\, w(y)\, dy - 0 = \int_{-1}^{1} \ell_{N+1}(y)^2\, w(y)\, dy$.

<u>Rem:</u> (i) Comme dans le cas général, il est possible d'étendre ces formules à l'évaluation de l'erreur des méthodes de Gauss composées.

(ii) Les méthodes de Gauss présentent alors l'avantage d'une précision maximale. Cependant, elles requièrent de calculer de façon très précise les racines des polynômes orthogonaux associés, ce qui ne peut se faire que numériquement lorsque ces racines ne sont pas données explicitement (comme dans l'exemple des polynômes de Chebyshev). La complexité de ce calcul limite l'usage pratique des méthodes de Gauss.

Nous concluons par l'évaluation du comportement des méthodes de Gauss vis-à-vis des erreurs d'arrondis.

<u>Thm:</u> Les coefficients $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq N}$ de la méthode de Gauss satisfont :
$\forall\, 0 \leq j \leq N,\ \lambda_j > 0.$

<u>Dém:</u> Considérons les polynômes de base de Lagrange : $\forall\, 0 \leq j \leq N,\ L_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} \left(\frac{x-x_k}{x_j-x_k} \right)$.
Comme $\forall\, 0 \leq j \leq N$, $d^\circ(L_j^{\,2}) = 2N \leq 2N+1$, $\int_{-1}^{1} L_j(y)^2\, w(y)\, dy = \sigma(L_j^2) = \lambda_j$
$\Rightarrow \lambda_j > 0.$

<u>Rem:</u> Il résulte de ce théorème que les méthodes de Gauss ont un très bon comportement vis-à-vis des erreurs d'arrondis comme les autres méthodes que nous avons introduites précédemment.