

## Corrigé de l'examen de rattrapage

### Questions de cours.

1. La fonction **Base** peut être définie de la façon suivante :

```
def Base(j, Y, x) :  
    l = 1  
    for k in range(0, len(Y)) :  
        if k != j :  
            l = l * (x - Y[k]) / (Y[j] - Y[k])  
    return l
```

2. La fonction **Milieu** peut être définie de la façon suivante :

```
def Milieu(f, L) :  
    S = 0  
    for i in range(0, len(L) - 1) :  
        S = S + (L[i + 1] - L[i]) * f((L[i] + L[i + 1]) / 2)  
    return S
```

### Exercice 1.

1.a. Comme la fonction  $f$  est polynomiale, elle est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2.$$

Cette dérivée ne s'annule qu'au point  $x = 0$ . Lorsque  $x_n$  est non nul, l'itération suivante  $x_{n+1}$  de la méthode de Newton est donc bien définie, et donnée par la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2}{3} \left( x_n + \frac{1}{x_n^2} \right).$$

b. Introduisons la fonction  $g$  définie par

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{2}{3} \left( x + \frac{1}{x^2} \right).$$

La fonction  $g$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ , et à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . Pour  $x_0 > 0$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, x_{n+1} = g(x_n),$$

est, par récurrence sur  $n \geq 0$ , bien définie et à valeurs strictement positives. D'après la question 1.a, cette suite est exactement celle donnée par la méthode de Newton pour la fonction  $f$ . Cette dernière suite est donc bien définie dès que  $x_0 > 0$ .

c. Commençons par l'étude de la fonction  $g$  définie à la question 1.b sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Par les opérations élémentaires sur les fonctions, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , avec

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{x^3} \right).$$

Cette dérivée est strictement négative sur l'intervalle  $]0, \sqrt[3]{2}[$ , s'annule en  $x = \sqrt[3]{2}$ , puis est strictement positive sur  $] \sqrt[3]{2}, +\infty[$ . Sachant que

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty, \quad g(\sqrt[3]{2}) = \frac{2}{3} \left( \sqrt[3]{2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} \right) = \sqrt[3]{2}, \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

l'image de l'intervalle  $]0, +\infty[$  par la fonction  $g$  est égal à  $[ \sqrt[3]{2}, +\infty[$ .

D'après la question 1.b, nous savons de plus que chacun des nombres  $x_n$  est strictement positif. Comme

$$\forall n \geq 1, x_n = g(x_{n-1}),$$

nous concluons que

$$\forall n \geq 1, x_n \geq \sqrt[3]{2}.$$

d. Lorsque  $x \geq \sqrt[3]{2}$ , nous vérifions que

$$g(x) - x = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{x^2} - x \right) = \frac{1}{3x^2} (2 - x^3) \leq 0.$$

D'après la question 1.c, tous les nombres  $x_n$  sont supérieurs ou égaux à  $\sqrt[3]{2}$  lorsque  $n \geq 1$ . Nous obtenons donc

$$\forall n \geq 1, x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n \leq 0,$$

ce qui assure la décroissance de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

e. D'après les questions 1.c et 1.d, la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée par  $\sqrt[3]{2}$ . Elle possède donc une limite  $\ell \geq \sqrt[3]{2}$ . Par continuité de la fonction  $g$ , nous observons que

$$x_{n+1} = g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(\ell).$$

Sachant que

$$x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

en tant que sous-suite de  $(x_n)_{n \geq 1}$ , nous concluons que le nombre  $\ell$  est un point fixe de la fonction  $g$ .

Nous vérifions alors que

$$g(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{2}{3\ell^2} = \frac{\ell}{3} \Leftrightarrow \ell^3 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt[3]{2},$$

puisque  $\ell > 0$ . En définitive, nous avons montré que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2}.$$

2.a. Rappelons que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Quel que soit l'entier  $n \geq 1$ , nous savons aussi que  $x_n \geq \sqrt[3]{2}$ . Nous pouvons donc déduire de la formule de Taylor-Lagrange l'existence d'un nombre  $\sqrt[3]{2} \leq \xi_n \leq x_n$  tel que

$$g(x_n) = g(\sqrt[3]{2}) + g'(\sqrt[3]{2})(x_n - \sqrt[3]{2}) + \frac{g''(\xi_n)}{2} (x_n - \sqrt[3]{2})^2.$$

D'après la question 1.c, nous savons que

$$g(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \quad \text{et} \quad g'(\sqrt[3]{2}) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{2}\right) = 0.$$

De plus, nous pouvons aussi calculer que

$$\forall x > 0, g''(x) = \frac{4}{x^4}.$$

Pour  $x \geq \sqrt[3]{2}$ , nous obtenons

$$0 \leq g''(x) \leq \frac{4}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}.$$

Sachant que  $x_{n+1} = g(x_n)$ , avec  $x_n \geq \sqrt[3]{2}$  pour  $n \geq 1$  par la question 1.c, nous concluons que

$$|x_{n+1} - \sqrt[3]{2}| = \frac{|g''(\xi_n)|}{2} (x_n - \sqrt[3]{2})^2 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (x_n - \sqrt[3]{2})^2.$$

b. Nous déduisons de la question 2.a que

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{x_{n+1} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right| \leq \left( \frac{x_n - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right)^2.$$

Autrement dit, la suite  $y_n = |x_{n+1} - \sqrt[3]{2}| / \sqrt[3]{2}$  satisfait

$$\forall n \geq 1, y_{n+1} \leq y_n^2.$$

Par récurrence sur  $n \geq 1$ , nous en déduisons que

$$y_n \leq y_1^{2^{n-1}},$$

de sorte que

$$\left| \frac{x_n - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^{2^{n-1}}} \left| x_1 - \sqrt[3]{2} \right|^{2^{n-1}}.$$

Nous concluons que

$$\left| x_n - \sqrt[3]{2} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^{2^{n-1}-1}} \left| x_1 - \sqrt[3]{2} \right|^{2^{n-1}}.$$

## Exercice 2.

1. Considérons les fonctions polynômes  $X_k$  définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, X_k(x) = x^k,$$

pour  $k \geq 0$ , et calculons

$$\sigma(X_0) = 2, \quad \sigma(X_1) = (1 - 2\theta)t, \quad \text{et} \quad \sigma(X_2) = t^2.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2, \quad \int_{-1}^1 x \, dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature  $\sigma$  est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} 2 = 2, \\ (1 - 2\theta)t = 0, \\ t^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Pour  $t \geq 0$ , l'unique solution de ce système est donnée par les nombres

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}, \\ t = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{1}{2} g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + g(0) + \frac{1}{2} g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ .

2. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = 0, \quad \text{et} \quad \sigma(X_4) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{4}{9}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5},$$

la méthode  $\sigma$  est d'ordre au moins égale à 3, et il existe un polynôme de degré égal à 4 pour lequel elle n'est pas exacte. Cette méthode est donc d'ordre égal à 3.

3. Pour  $y \in [-1, 1]$ , posons

$$\forall x \in [-1, 1], g_y(x) = (x - y)_+^3.$$

Par définition, le noyau de Peano  $K_3$  de la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  est égal à

$$\forall y \in [-1, 1], K_3(y) = \int_{-1}^1 g_y(x) dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 g_y(x) dx = \int_y^1 (x - y)^3 dx = \left[ \frac{(x - y)^4}{4} \right]_y^1 = \frac{(1 - y)^4}{4},$$

et que

$$\sigma(g_y) = \frac{1}{2} g_y\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + g_y(0) + \frac{1}{2} g_y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} - y\right)_+^3 + (-y)_+^3 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - y\right)_+^3,$$

nous obtenons

$$K_3(y) = \frac{(1 - y)^4}{4} - \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} - y\right)_+^3 - (-y)_+^3 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - y\right)_+^3.$$

4. Étant donnée une fonction  $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ , rappelons que l'erreur associée à la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  pour cette fonction est donnée par la formule

$$E(g) = \int_{-1}^1 g(y) dy - \sigma(g).$$

Lorsque la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^4$  sur le segment  $[-1, 1]$ , nous savons que cette erreur s'exprime en fonction du noyau de Peano  $K_3$  sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 K_3(y) g^{(4)}(y) dy,$$

ce qui conduit à la formule

$$E(g) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left( \frac{(1-y)^4}{4} - \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} - y \right)_+^3 - (-y)_+^3 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} - y \right)_+^3 \right) g^{(4)}(y) dy,$$

d'après la question 3.

### Exercice 3.

1. Pour  $0 \leq a \leq 1$ , introduisons la fonction

$$\forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \Phi(t, y, h) = f(t + ah, y + ahf(t, y)).$$

La fonction  $\Phi$  est bien définie et continue sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  suit le schéma numérique considéré aux temps  $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ . Cette méthode est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \Phi(t, y, 0) = f(t + 0, y + 0f(t, y)) = f(t, y),$$

ce qui assure la consistance de cette méthode numérique quel que soit  $0 \leq a \leq 1$ .

b. Pour  $t \in [0, T]$ ,  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $h \in \mathbb{R}$  fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction  $f$  que

$$\begin{aligned} |\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| &\leq \left| f(t + ah, y_2 + ahf(t, y_2)) - f(t + ah, y_1 + ahf(t, y_1)) \right| \\ &\leq K |y_2 + ahf(t, y_2) - y_1 - ahf(t, y_1)|. \end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$|y_2 + ahf(t, y_2) - y_1 - ahf(t, y_1)| \leq |y_2 - y_1| + a|h| |f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq (1 + K|h|) |y_2 - y_1|,$$

puisque  $0 \leq a \leq 1$ . Nous en déduisons l'inégalité

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq K(1 + K|h|) |y_2 - y_1|.$$

Sous la condition  $|h| \leq 1$ ,<sup>1</sup> et quel que soit  $0 \leq a \leq 1$ , la fonction  $\Phi$  est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit que cette méthode numérique est stable.

---

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme  $|h| < h_0$ , où  $h_0$  est un nombre réel strictement positif fixé.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode numérique considérée est consistante et stable sous la condition  $|h| \leq 1$ , et quel que soit  $0 \leq a \leq 1$ . Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous ces conditions.

3.a. Étant donnée une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ , la fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ . De plus, elle satisfait

$$\partial_h \Phi(t, y, h) = a \left( \partial_t f(t + ah, y + ahf(t, y)) + f(t, y) \partial_y f(t + ah, y + ahf(t, y)) \right),$$

pour tout  $(t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ . Rappelons alors que les fonctions  $f^{[0]}$  et  $f^{[1]}$  sont données par les formules

$$f^{[0]}(t, y) = f(t, y), \quad \text{et} \quad f^{[1]}(t, y) = \partial_t f(t, y) + f(t, y) \partial_y f(t, y).$$

Nous obtenons donc

$$\Phi(t, y, 0) = f^{[0]}(t, y), \quad \text{et} \quad \partial_h \Phi(t, y, 0) = a f^{[1]}(t, y).$$

Lorsque  $a \neq 1/2$ , et pour une fonction  $f$  générale, nous observons que l'identité

$$\partial_h \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t, y),$$

ne peut être vraie pour tout couple  $(t, y)$ . La méthode numérique considérée est donc d'ordre 1 si et seulement si  $a \neq 1/2$ .

b. D'après la question 3.a, la méthode considérée ne peut être d'ordre 2 que si  $a = 1/2$ , et nous savons aussi que cette méthode est au moins d'ordre égal à 2. Étant donnée une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ , la fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ . De plus, elle satisfait

$$\begin{aligned} \partial_h^2 \Phi(t, y, h) = & a^2 \left( \partial_t^2 f(t + ah, y + ahf(t, y)) + 2f(t, y) \partial_t \partial_y f(t + ah, y + ahf(t, y)) \right. \\ & \left. + f(t, y)^2 \partial_y^2 f(t + ah, y + ahf(t, y)) \right), \end{aligned}$$

pour tout  $(t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ , tandis que

$$f^{[2]}(t, y) = \partial_t^2 f(t, y) + \partial_t f(t, y) \partial_y f(t, y) + f(t, y) (2\partial_t \partial_y f(t, y) + \partial_y f(t, y)^2 + f(t, y) \partial_y^2 f(t, y)).$$

Dans le cas où  $a = 1/2$ , l'identité

$$\partial_h^2 \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{3} f^{[2]}(t, y),$$

ne peut être vraie en tout couple  $(t, y)$  pour une fonction  $f$  générale. Pour  $a = 1/2$ , la méthode considérée est donc d'ordre égal à 2.

c. D'après les questions 3.a et 3.b, la méthode considérée est donc d'ordre égal à 1 pour  $a \neq 1/2$ , et à 2 pour  $a = 1/2$ . Elle est donc d'ordre le plus élevé pour  $a = 1/2$ . Il s'agit alors de la méthode dite du point milieu.