

Corrigé de l'examen de rattrapage

Questions de cours.

1. Le théorème du point fixe de Banach s'énonce ainsi : "Supposons que la fonction f est contractante sur \mathbb{R} , soit qu'il existe un nombre $0 \leq K < 1$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Alors il existe un unique point $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a) = a.$$

De plus, si une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est définie de façon récursive par

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n),$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a."$$

2. Le théorème de convergence des sommes de Riemann s'énonce ainsi : "Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Considérons des subdivisions $a = x_0 < \dots < x_M = b$ du segment $[a, b]$, ainsi que des points $(\xi_i)_{0 \leq i \leq M-1}$ qui satisfont

$$\forall 0 \leq i \leq M-1, x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}.$$

Alors les sommes de Riemann

$$S(f) = \sum_{i=0}^{M-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

satisfont

$$S(f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx,$$

dans la limite où le pas maximal $h = \max_{0 \leq i \leq M-1} |x_{i+1} - x_i|$ tend vers 0."

3. Considérons une méthode numérique à un pas définie par les formules de récurrence

$$y_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n),$$

pour une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$, et des pas associés $(h_n = t_{n+1} - t_n)_{0 \leq n \leq N-1}$. Cette méthode numérique à un pas est consistante avec l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

si et seulement si, quelle que soit la solution $y \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$ de cette équation différentielle, les erreurs de consistance $(e_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ définies par

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, e_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n),$$

satisfont

$$\sum_{n=0}^{N-1} |e_n| \rightarrow 0,$$

lorsque le pas maximal $h_{\max} = \max_{0 \leq n \leq N-1} |t_{n+1} - t_n|$ tend vers 0.

4. Considérons une méthode numérique à un pas définie par les formules de récurrence

$$y_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n),$$

pour une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$, et des pas associés $(h_n = t_{n+1} - t_n)_{0 \leq n \leq N-1}$. Cette méthode numérique à un pas est convergente pour l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

si et seulement si, quelle que soit la solution $y \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$ de cette équation différentielle, les valeurs approchées $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ satisfont

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \rightarrow 0,$$

lorsque $y_0 \rightarrow y(t_0)$ et $h_{\max} = \max_{0 \leq n \leq N-1} |t_{n+1} - t_n| \rightarrow 0$.

Exercice 1.

1.a. Par définition, nous calculons

$$f[x_0] = f(-2) = \ln(5), \quad f[x_1] = f(0) = 0, \quad \text{et} \quad f[x_2] = f(2) = \ln(5),$$

puis,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = -\frac{\ln(5)}{2}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{\ln(5)}{2},$$

et enfin,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\ln(5)}{4}.$$

b. Par la formule de Newton, le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ est égal à

$$P_f(X) = f[x_0, x_1, x_2](X - x_0)(X - x_1) + f[x_0, x_1](X - x_0) + f[x_0],$$

d'où par la question 1.a,

$$P_f(X) = \frac{\ln(5)}{4}(X^2 + 2X) - \frac{\ln(5)}{2}(X + 2) + \ln(5) = \frac{\ln(5)}{4}X^2.$$

2.a. Par définition, les polynômes de base de Lagrange aux points x_0, x_1 et x_2 sont donnés par les formules

$$\ell_0(X) = \frac{(X - x_2)(X - x_1)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)} = \frac{1}{8}(X^2 - 2X),$$

$$\ell_1(X) = \frac{(X - x_2)(X - x_0)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} = -\frac{1}{4}(X^2 - 4),$$

et

$$\ell_2(X) = \frac{(X - x_1)(X - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{1}{8}(X^2 + 2X).$$

b. Le théorème de Lagrange assure que le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ vaut

$$P_f(X) = f(x_0)\ell_0(X) + f(x_1)\ell_1(X) + f(x_2)\ell_2(X),$$

ce qui conduit de nouveau à l'expression

$$P_f(X) = \frac{\ln(5)}{8}(X^2 - 2X) + \frac{\ln(5)}{8}(X^2 + 2X) = \frac{\ln(5)}{4}X^2.$$

Exercice 2.

1. Considérons les fonctions polynômes X_k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_{2k}) = (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \xi)^{2k}, \quad \text{et} \quad \sigma(X_{2k+1}) = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - \xi)^{2k+1}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 x^{2k} dx = \frac{2}{2k+1}, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^{2k+1} dx = 0,$$

la formule de quadrature σ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - \xi) = 0, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \xi)^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 - \lambda_1, \\ \lambda_2 = \lambda_1 \text{ ou } \xi = 1, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \xi)^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Comme la dernière de ces égalités assure que $\xi \neq 1$, ce système a donc pour solutions

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \text{et} \quad \xi = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } \xi = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dans les deux cas, la méthode s'écrit

$$\sigma(g) = g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, et il s'agit donc de l'unique méthode de quadrature élémentaire de cette forme dont l'ordre est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est donc maximal pour ce choix.

2.a. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0 = \int_{-1}^1 x^3 dx,$$

tandis que

$$\sigma(X_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^1 x^4 dx.$$

Cette méthode de quadrature élémentaire est donc d'ordre au moins égal à 3, mais il existe aussi un polynôme de degré égal à 4 pour lequel elle n'est pas exacte. En conclusion, cette méthode est d'ordre égal à 3.

b. Pour $y \in [-1, 1]$, posons

$$\forall x \in [-1, 1], g_y(x) = (x - y)_+^3.$$

Par définition, le noyau de Peano K_3 de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1, 1], K_3(y) = \int_{-1}^1 g_y(x) dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 g_y(x) dx = \int_y^1 (x - y)^3 dx = \left[\frac{(x - y)^4}{4} \right]_y^1 = \frac{(1 - y)^4}{4},$$

et que

$$\sigma(g_y) = g_y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g_y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3,$$

nous obtenons

$$K_3(y) = \frac{(1 - y)^4}{4} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3.$$

c. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, rappelons que l'erreur associée à la méthode de quadrature élémentaire σ est donnée par la formule

$$E(g) = \int_{-1}^1 g(y) dy - \sigma(g).$$

Lorsque la fonction g est de classe \mathcal{C}^4 sur le segment $[-1, 1]$, nous savons que cette erreur s'exprime en fonction du noyau de Peano K_3 sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 K_3(y) g^{(4)}(y) dy,$$

ce qui conduit à la formule

$$E(g) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left(\frac{(1 - y)^4}{4} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - y\right)_+^3 \right) g^{(4)}(y) dy.$$

3. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, la méthode de quadrature composée Σ est donnée par la formule

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{3}}\right) \right).$$

Exercice 3.

1. Introduisons la fonction

$$\forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \Phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right).$$

La fonction Φ est bien définie et continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suit le schéma numérique considéré aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. Cette méthode est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \Phi(t, y, 0) = f\left(t + 0, y + 0f(t, y)\right) = f(t, y),$$

ce qui assure la consistance de cette méthode numérique.

b. Pour $t \in [0, T]$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}$ fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction f que

$$\begin{aligned} |\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| &\leq \left| f\left(t + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}f(t, y_2)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f(t, y_1)\right) \right| \\ &\leq K \left| y_2 + \frac{h}{2}f(t, y_2) - y_1 - \frac{h}{2}f(t, y_1) \right|. \end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$\left| y_2 + \frac{h}{2}f(t, y_2) - y_1 - \frac{h}{2}f(t, y_1) \right| \leq |y_2 - y_1| + \frac{|h|}{2} |f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq \left(1 + \frac{K|h|}{2}\right) |y_2 - y_1|,$$

d'où l'inégalité

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq K \left(1 + \frac{K|h|}{2}\right) |y_2 - y_1|.$$

Sous la condition $|h| \leq 1$,¹ la fonction Φ est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit que cette méthode numérique est stable.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode numérique considérée est consistante et stable sous la condition $|h| \leq 1$. Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous cette condition.

3. Lorsque la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, la fonction Φ définie à la question 1. est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$. De plus, elle satisfait

$$\partial_h \Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} \left(\partial_t f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) + f(t, y) \partial_y f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) \right),$$

et

$$\begin{aligned} \partial_h^2 \Phi(t, y, h) &= \frac{1}{4} \left(\partial_t^2 f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) + 2f(t, y) \partial_t \partial_y f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) \right. \\ &\quad \left. + f(t, y)^2 \partial_y^2 f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) \right), \end{aligned}$$

pour tout $(t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$. Rappelons alors que les fonctions $f^{[0]}$, $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont données par les formules

$$f^{[0]}(t, y) = f(t, y), \quad f^{[1]}(t, y) = \partial_t f(t, y) + f(t, y) \partial_y f(t, y),$$

et

$$f^{[2]}(t, y) = \partial_t^2 f(t, y) + \partial_t f(t, y) \partial_y f(t, y) + f(t, y) (2\partial_t \partial_y f(t, y) + \partial_y f(t, y)^2 + f(t, y) \partial_y^2 f(t, y)).$$

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme $|h| < h_0$, où h_0 est un nombre réel strictement positif fixé.

Nous obtenons donc

$$\Phi(t, y, 0) = \frac{1}{1} f^{[0]}(t, y), \quad \text{et} \quad \partial_h \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t, y),$$

tandis que, pour une fonction f générale,

$$\partial_h^2 \Phi(t, y, 0) \neq \frac{1}{3} f^{[2]}(t, y).$$

En général, cette méthode numérique est donc d'ordre égal à 2.