

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (2 points)

1. Soit $N \geq 0$. Définir une fonction Python **Base** qui prend en entrée un entier $0 \leq j \leq N$, une liste de coefficients $Y = [y_0, \dots, y_N]$, et un nombre réel x , et renvoie la valeur au point x du polynôme de base de Lagrange

$$\ell_j(X) = \prod_{0 \leq k \neq j \leq N} \frac{X - y_k}{y_j - y_k}.$$

2. Définir une fonction Python **Milieu** qui prend en entrée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et la liste $L = [x_0, \dots, x_N]$ des points d'une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ du segment $[a, b]$, et renvoie la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ calculée par la méthode du point milieu.

Exercice 1. (7 points)

Nous cherchons à déterminer une valeur approchée du nombre $\sqrt[3]{2}$ à l'aide de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2.$$

1.a. Donner la définition de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ qui correspond à la méthode de Newton pour la fonction f .

b. Vérifier que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie quel que soit le choix de la valeur initiale $x_0 > 0$.

c. Montrer que

$$\forall n \geq 1, x_n \geq \sqrt[3]{2}.$$

d. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

e. Conclure que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2}.$$

2.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, \left| x_{n+1} - \sqrt[3]{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(x_n - \sqrt[3]{2} \right)^2.$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \left| x_n - \sqrt[3]{2} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^{2^{n-1}-1}} \left| x_1 - \sqrt[3]{2} \right|^{2^{n-1}}.$$

Exercice 2. (4 points)

Soit $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 1$. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire σ définie par l'expression

$$\sigma(g) = \theta g(-t) + g(0) + (1 - \theta)g(t).$$

1. Déterminer les valeurs des nombres t et θ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.
2. Quel est alors l'ordre p de cette méthode ?
3. Calculer le noyau de Peano K_p de la méthode de quadrature élémentaire σ .
4. En déduire la formule de l'erreur $E(g)$ pour l'application de la méthode σ à une fonction $g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ en fonction du noyau de Peano K_p .

Exercice 3. (7 points)

Soit $T > 0$ et $C \geq 0$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|.$$

Étant donnée une condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Pour $0 \leq a \leq 1$, nous introduisons la méthode numérique définie par le schéma

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \begin{cases} z_{n+1} = y_n + ahf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + ah, z_{n+1}), \end{cases}$$

dans lequel nous avons noté $h = T/N$ pour un entier $N \geq 1$, et $t_n = nh$ pour $0 \leq n \leq N$.

1. Vérifier que cette méthode est une méthode à un pas de type explicite.
- 2.a. Sous quelles conditions sur le nombre a , cette méthode est-elle consistante ?
- b. Sous quelles conditions sur le nombre a et le pas h , cette méthode est-elle stable ?
- c. En déduire des conditions sur le nombre a et le pas h pour que cette méthode soit convergente.
- 3.a. Sous quelles conditions sur le nombre a , cette méthode est-elle d'ordre 1 ?
- b. Sous quelles conditions sur le nombre a , cette méthode est-elle d'ordre 2 ?
- c. Pour quelles valeurs du nombre a , cette méthode est-elle d'ordre le plus élevé ?