

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. L'algorithme de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction F de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I est défini par la formule de récurrence

$$x_0 \in I, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

(lorsqu'elle fait sens).

2. Supposons qu'il existe des points $(x_0, y_0) \in I^2$ tels que $F(x_0) < 0 < F(y_0)$. La méthode de la dichotomie pour la recherche des zéros de la fonction F est alors définie par la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} x_{n+1} = x_n, & \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, & \text{si} \quad F\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) > 0, \\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, & \text{et} \quad y_{n+1} = y_n, & \text{si} \quad F\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) < 0, \\ x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, & \text{si} \quad F\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

3. Le polynôme d'interpolation de Lagrange P_f de la fonction f aux points x_0, x_1, \dots , et x_N est donné par la formule de Newton

$$P_f(X) = \sum_{k=0}^N f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (X - x_j),$$

où la notation $f[x_0, \dots, x_k]$ désigne la différence divisée de la fonction f aux points x_0, x_1, \dots , et x_k .

4. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'énonce ainsi : " Soit I un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} . Fixons deux nombres $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, et considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est globalement lipschitzienne en sa seconde variable. Il existe alors une unique solution globale $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Exercice 1.

1.a. Soit $0 \leq j \leq N$. Par définition des polynômes P et Q_j , nous avons

$$P(X) = (X - x_0) \dots (X - x_j) \dots (X - x_N) = (X - x_j) \prod_{i \neq j} (X - x_i) = (X - x_j) Q_j(X).$$

b. Rappelons que les fonctions polynômes sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Nous pouvons donc appliquer la formule de dérivation d'un produit à l'identité de la question 1.a afin d'obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = Q_j(x) + (x - x_j) Q_j'(x).$$

Pour $x = x_j$, nous concluons que

$$P'(x_j) = Q_j(x_j).$$

c. Par définition du polynôme Q_j , nous calculons

$$Q_j(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i).$$

Sachant que les nombres x_0, x_1, \dots , et x_N sont deux à deux distincts, cette expression est non nulle, ce qui assure par la question 1.b que

$$P'(x_j) \neq 0.$$

2.a. Rappelons que le polynôme d'interpolation de Lagrange L_f de f aux points x_0, x_1, \dots et x_N est défini par

$$L_f(X) = \sum_{j=0}^N f(x_j) \prod_{i \neq j} \left(\frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right).$$

Par définition du polynôme Q_j , nous vérifions que

$$\prod_{i \neq j} \left(\frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right) = \frac{\prod_{i \neq j} (X - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} = \frac{Q_j(X)}{Q_j(x_j)}.$$

Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, les questions 1.a et 1.b assurent que

$$Q_j(x) = \frac{P(x)}{(x - x_j)}, \quad \text{et} \quad Q_j(x_j) = P'(x_j),$$

de sorte que

$$\prod_{i \neq j} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) = \frac{P(x)}{P'(x_j) (x - x_j)}.$$

Par définition des nombres α_j , nous aboutissons à

$$L_f(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j) \frac{\alpha_j P(x)}{x - x_j}.$$

b. Considérons la fonction g constante égale à 1. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 0, soit inférieur ou égal à N . Elle coïncide donc avec son polynôme de Lagrange L_g aux points x_0, x_1, \dots , et x_N . Autrement dit, elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, L_g(x) = g(x) = 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, nous déduisons de la formule de la question 2.a que

$$\sum_{j=0}^N g(x_j) \frac{\alpha_j P(x)}{x - x_j} = 1,$$

c'est-à-dire

$$P(x) \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{x - x_j} = 1.$$

c. Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}$, la formule de la question 2.a conduit aux identités

$$\sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{x - x_j} \left(\sum_{k=0}^N f(x_k) \frac{\alpha_k P(x)}{x - x_k} \right) = \left(P(x) \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{x - x_j} \right) \left(\sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k f(x_k)}{x - x_k} \right),$$

de sorte que par la question 2.b,

$$\sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k f(x_k)}{x - x_k}.$$

Exercice 2.

1. Considérons les fonctions polynômes X_k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, X_k(x) = x^k,$$

pour $k \geq 0$, et calculons

$$\sigma(X_0) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \sigma(X_1) = \lambda_1 \xi + \lambda_2, \quad \text{et} \quad \sigma(X_2) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2, \quad \int_{-1}^1 x \, dx = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3},$$

la formule de quadrature σ est d'ordre au moins égal à 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 \xi + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 - \lambda_1, \\ \lambda_1(1 - \xi) = 2, \\ \lambda_1(1 - \xi^2) = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

puis, comme $\xi \neq 1$, à

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2 - \lambda_1, \\ \lambda_1(1 - \xi) = 2, \\ 1 + \xi = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Son unique solution est donc égale à

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \xi = -\frac{1}{3}.$$

Ce choix est le seul pour lequel l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est au moins égal à 2. Pour tous les autres choix possibles, l'ordre est strictement inférieur. L'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ est donc maximal lorsqu'elle s'écrit

$$\sigma(g) = \frac{3}{2} g\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} g(1),$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

2.a. Dans ce cas, nous calculons

$$\sigma(X_3) = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0,$$

il existe un polynôme de degré égal à 3 pour lequel la méthode de quadrature élémentaire σ n'est pas exacte. Cette méthode est donc d'ordre égal à 2.

b. Pour $y \in [-1, 1]$, posons

$$\forall x \in [-1, 1], g_y(x) = (x - y)_+^2.$$

Par définition, le noyau de Peano K_2 de la méthode de quadrature élémentaire σ est égal à

$$\forall y \in [-1, 1], K_2(y) = \int_{-1}^1 g_y(x) dx - \sigma(g_y).$$

Sachant que

$$\int_{-1}^1 g_y(x) dx = \int_y^1 (x - y)^2 dx = \left[\frac{(x - y)^3}{3} \right]_y^1 = \frac{(1 - y)^3}{3},$$

et que

$$\sigma(g_y) = \frac{3}{2} g_y \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} g_y(1) = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} - y \right)_+^2 + \frac{1}{2} (1 - y)_+^2,$$

nous obtenons

$$K_2(y) = \frac{(1 - y)^3}{3} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} - y \right)_+^2 - \frac{1}{2} (1 - y)^2 = -\frac{1}{6} (1 - y)^2 (1 + 2y) - \frac{1}{2} (1 + 3y)_-^2.$$

3.a. Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, la méthode de quadrature composée Σ est donnée par la formule

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{3}{2} f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \right) + \frac{1}{2} f(x_{i+1}) \right),$$

soit

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{4} \left(3f \left(\frac{2x_i + x_{i+1}}{3} \right) + f(x_{i+1}) \right).$$

b. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons l'erreur

$$E(g) = \int_{-1}^1 g(y) dy - \sigma(g),$$

associée à la méthode de quadrature élémentaire σ . Lorsque la fonction g est de classe \mathcal{C}^3 sur le segment $[-1, 1]$, rappelons que cette erreur s'exprime en fonction du noyau de Peano K_2 sous la forme

$$E(g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K_2(y) g'''(y) dy.$$

Nous allons appliquer cette formule pour exprimer l'erreur $\mathcal{E}(f)$ associée à la méthode de quadrature composée Σ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$.

Introduisons les fonctions

$$\forall y \in [-1, 1], f_i(y) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right),$$

pour $0 \leq i \leq M-1$. Comme le changement de variables

$$x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2},$$

réalise une bijection affine entre les segments $[-1, 1]$ et $[x_i, x_{i+1}]$, les fonctions f_i sont bien définies et de classe \mathcal{C}^3 sur le segment $[-1, 1]$. Par définition de la méthode de quadrature composée Σ , elles satisfont de plus

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sigma(f_i),$$

de sorte que par définition de l'erreur $\mathcal{E}(f)$,

$$\mathcal{E}(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sigma(f_i).$$

Par la formule de Chasles, et les changements de variables précédents, nous obtenons

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sigma(f_i) \right) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\int_{-1}^1 f_i(y) dy - \sigma(f_i) \right).$$

Nous aboutissons à

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} E(f_i),$$

d'où la formule

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{4} \int_{-1}^1 K_2(y) f_i'''(y) dy$$

Comme

$$f_i'''(y) = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^3 f''' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right),$$

nous concluons que

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{32} \int_{-1}^1 K_2(y) f''' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + y\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) dy,$$

soit

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{16} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K_2\left(\frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}\right) f'''(x) dx,$$

par le changement de variables

$$y = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}.$$

Exercice 3.

1. Introduisons la fonction

$$\forall (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2, \Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} \left(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)) \right).$$

La fonction Φ est bien définie et continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. De plus, elle satisfait

$$\forall 0 \leq n \leq N - 1, y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

lorsque la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suit le schéma numérique de Heun aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. La méthode de Heun est donc une méthode explicite à un pas.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} \left(f(t, y) + f(t + 0, y + 0f(t, y)) \right) = f(t, y),$$

ce qui assure la consistance de la méthode de Heun.

b. Pour $t \in [0, T]$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}$ fixés, nous déduisons du caractère globalement lipschitzien de la fonction f que

$$\begin{aligned} |\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| &\leq \frac{1}{2} \left(|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \right. \\ &\quad \left. + |f(t + h, y_2 + hf(t, y_2)) - f(t + h, y_1 + hf(t, y_1))| \right) \\ &\leq \frac{K}{2} \left(|y_2 - y_1| + |y_2 + hf(t, y_2) - y_1 - hf(t, y_1)| \right). \end{aligned}$$

De même, nous calculons

$$|y_2 + hf(t, y_2) - y_1 - hf(t, y_1)| \leq |y_2 - y_1| + |h| |f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq (1 + K|h|) |y_2 - y_1|,$$

d'où l'inégalité

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq \frac{K}{2} (2 + K|h|) |y_2 - y_1|.$$

Sous la condition $|h| \leq 1$,¹ la fonction Φ est donc globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, ce qui garantit que la méthode de Heun est stable.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la méthode de Heun est consistante et stable sous la condition $|h| \leq 1$. Par le théorème de convergence des méthodes numériques à un pas, elle est donc convergente sous cette condition.

3. Lorsque la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, la fonction Φ définie à la question 1. est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$. De plus, elle satisfait

$$\partial_h \Phi(t, y, h) = \frac{1}{2} \left(\partial_t f(t + h, y + hf(t, y)) + f(t, y) \partial_y f(t + h, y + hf(t, y)) \right),$$

et

$$\begin{aligned} \partial_h^2 \Phi(t, y, h) &= \frac{1}{2} \left(\partial_t^2 f(t + h, y + hf(t, y)) + 2f(t, y) \partial_t \partial_y f(t + h, y + hf(t, y)) \right. \\ &\quad \left. + f(t, y)^2 \partial_y^2 f(t + h, y + hf(t, y)) \right), \end{aligned}$$

1. Cette condition peut être remplacée par n'importe quelle condition de la forme $|h| < h_0$, où h_0 est un nombre réel strictement positif fixé.

pour tout $(t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$. Rappelons alors que les fonctions $f^{[0]}$, $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont données par les formules

$$f^{[0]}(t, y) = f(t, y), \quad f^{[1]}(t, y) = \partial_t f(t, y) + f(t, y) \partial_y f(t, y),$$

et

$$f^{[2]}(t, y) = \partial_t^2 f(t, y) + \partial_t f(t, y) \partial_y f(t, y) + f(t, y) (2\partial_t \partial_y f(t, y) + \partial_y f(t, y)^2 + f(t, y) \partial_y^2 f(t, y)).$$

Nous obtenons donc

$$\Phi(t, y, 0) = \frac{1}{1} f^{[0]}(t, y), \quad \text{et} \quad \partial_h \Phi(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t, y),$$

tandis que, pour une fonction f générale,

$$\partial_h^2 \Phi(t, y, 0) \neq \frac{1}{3} f^{[2]}(t, y).$$

En général, la méthode de Heun est donc d'ordre égal à 2.