

## Examen

*La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.*

### Questions de cours. (4 points)

1. Donner la définition de la méthode de Newton pour la recherche des zéros d'une fonction  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .
2. Donner la définition de la méthode de la dichotomie pour la recherche des zéros d'une fonction  $F$  continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .
3. Considérons des nombres réels  $x_0, x_1, \dots$ , et  $x_N$  deux à deux distincts, et une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Écrire la formule de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange  $P_f$  de la fonction  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots$ , et  $x_N$  en fonction des différences divisées de cette fonction en ces points.
4. Donner l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

### Exercice 1. (6 points)

Considérons des nombres réels  $x_0, x_1, \dots$ , et  $x_N$  deux à deux distincts, et posons

$$P(X) = \prod_{i=0}^N (X - x_i), \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq j \leq N, Q_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (X - x_i).$$

1.a. Vérifier que

$$\forall 0 \leq j \leq N, P(X) = (X - x_j) Q_j(X).$$

b. En déduire que

$$\forall 0 \leq j \leq N, P'(x_j) = Q_j(x_j).$$

c. Conclure que

$$\forall 0 \leq j \leq N, P'(x_j) \neq 0.$$

2. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . Posons

$$\forall 0 \leq j \leq N, \alpha_j = \frac{1}{P'(x_j)}.$$

a. Vérifier que le polynôme d'interpolation de Lagrange  $L_f$  de  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots$  et  $x_N$  satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}, L_f(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j) \frac{\alpha_j P(x)}{x - x_j}.$$

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}, P(x) \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{x - x_j} = 1.$$

c. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_N\}, \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j L_f(x)}{x - x_j} = \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j f(x_j)}{x - x_j}.$$

**Exercice 2.** (5 points)

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , et  $-1 \leq \xi < 1$ . Étant donnée une fonction  $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ , considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \lambda_1 g(\xi) + \lambda_2 g(1).$$

1. Déterminer la valeur des nombres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\xi$  afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

Dans toute la suite de cet exercice, nous fixons les nombres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\xi$  afin que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  soit maximal.

2.a. Quel est alors l'ordre  $p$  de cette méthode ?

b. En déduire le noyau de Peano  $K_p$  de cette méthode.

3. Considérons une subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$  d'un segment  $[a, b]$  (non réduit à un point).

a. Écrire la formule de la méthode de quadrature composée  $\Sigma$  associée à la méthode de quadrature élémentaire  $\sigma$  et à la subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$ .

b. Écrire la formule de l'erreur  $\mathcal{E}(f)$  associée à la méthode de quadrature composée  $\Sigma$  pour une fonction  $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a, b], \mathbb{R})$  en fonction du noyau de Peano  $K_p$ .

**Exercice 3.** (5 points)

Soit  $T > 0$ . Considérons une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|,$$

pour un nombre  $K \geq 0$ . Étant donnée une condition initiale  $y^0 \in \mathbb{R}$ , nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

par la méthode de Heun. Pour un entier  $N \geq 1$ , cette méthode est définie par le schéma numérique

$$y_0 = y^0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, \begin{cases} z_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left( f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1}) \right), \end{cases}$$

où

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N, t_n = nh.$$

1. Vérifier que la méthode de Heun est une méthode à un pas de type explicite.

2.a. Vérifier que cette méthode est consistante.

b. Donner une condition sur le pas  $h$  pour que la méthode de Heun soit stable.

c. En déduire que cette méthode est convergente sous cette condition sur le pas  $h$ .

3. Quel est l'ordre de la méthode de Heun ?