

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Donner l'énoncé du théorème du point fixe de Banach pour une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
2. Donner l'énoncé du théorème de convergence des sommes de Riemann sur un segment $[a, b]$.
3. Donner la définition de la consistance d'une méthode numérique à un pas.
4. Donner la définition de la convergence d'une méthode numérique à un pas.

Exercice 1. (6 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1),$$

et les points d'interpolation $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

- 1.a. Calculer les différences divisées $f[x_0]$, $f[x_1]$, $f[x_2]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$ et $f[x_0, x_1, x_2]$.
- b. En déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ de la fonction f aux points x_0 , x_1 et x_2 .
- 2.a. Déterminer les polynômes de base de Lagrange $\ell_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_2(X)$ aux points x_0 , x_1 et x_2 .
- b. À l'aide des polynômes $\ell_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_2(X)$, vérifier l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_f(X)$ de la fonction f aux points x_0 , x_1 et x_2 .

Exercice 2. (5 points)

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $0 \leq \xi \leq 2$. Étant donnée une fonction $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, considérons la méthode de quadrature élémentaire

$$\sigma(g) = \lambda_1 g(1 - \xi) + \lambda_2 g(\xi - 1).$$

1. Déterminer les valeurs des nombres λ_1 , λ_2 et ξ afin que l'ordre de cette formule de quadrature soit maximal.

Dans toute la suite de cet exercice, nous fixons les nombres λ_1 , λ_2 et ξ afin que l'ordre de la méthode de quadrature élémentaire σ soit maximal.

- 2.a. Quel est alors l'ordre p de cette méthode?
 - b. En déduire le noyau de Peano K_p de cette méthode.
 - c. En déduire la formule de l'erreur $E(g)$ associée à la méthode de quadrature élémentaire σ pour une fonction $g \in \mathcal{C}^{p+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ en fonction du noyau de Peano K_p .
3. Considérons une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$ d'un segment $[a, b]$ (non réduit à un point). Écrire la formule de la méthode de quadrature composée Σ associée à la méthode de quadrature élémentaire σ et à la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq M}$.

Exercice 3. (5 points)

Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$

pour un nombre $K \geq 0$. Pour $T > 0$ et $N \geq 1$, posons

$$h = \frac{T}{N}, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N, t_n = n h.$$

Étant donnée une condition initiale $y^0 \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons à la résolution approchée du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

par la méthode numérique

$$y_0 = y^0, \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, y_{n+1} = y_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right),$$

1. Cette méthode numérique est-elle une méthode à un pas de type explicite ?
- 2.a. Vérifier que cette méthode est consistante.
- b. Donner une condition sur le pas h pour que cette méthode soit stable.
- c. En déduire que cette méthode est convergente sous cette condition sur le pas h .
3. Quel est l'ordre de cette méthode ?