

Chapitre III : Transformation de Fourier

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étendre à des fonctions de la variable réelle quelconques, la démarche entreprise pour les fonctions périodiques dans le cadre de la théorie des séries de Fourier. Étant donnée une fonction T -périodique, à valeurs réelles ou complexes, pour un nombre $T > 0$, rappelons qu'il s'agit de décomposer cette fonction comme une somme ou une série de fonctions élémentaires plus faciles à manipuler, en l'occurrence les fonctions sinusoidales T -périodiques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \\ \text{ou} \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \end{array} \right.$$

ou les fonctions exponentielles complexes T -périodiques :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{T}}.$$

C'est sur cette deuxième classe de fonctions que s'appuie la transformation de Fourier, puisque nous cherchons à décomposer une fonction f quelconque sur les fonctions exponentielles complexes :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e_\xi(x) = e^{i\xi x}.$$

Observons que cette famille de fonctions élémentaires ne dépend plus d'une variable discrète $n \in \mathbb{Z}$, mais d'une variable continue $\xi \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'écrit la fonction f non plus comme une somme ou une série des fonctions exponentielles complexes, mais comme une intégrale de ces fonctions : la transformation de Fourier.

En pratique, la décomposition de la fonction f suivant sa transformée de Fourier se déroule en deux étapes. D'abord l'analyse qui consiste à déterminer cette transformée de Fourier, définie tout comme les coefficients de Fourier par une

formule intégrale:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

puis la synthèse qui cherchera à établir sous quelles conditions, en particulier d'intégrabilité, la fonction f peut s'écrire comme une intégrale de sa transformation de Fourier via la formule de Fourier inverse:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire un cadre fonctionnel qui permet de définir et de manipuler la transformation de Fourier: celui de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$. Nous définirons ensuite la transformée de Fourier d'une fonction intégrable et énoncerons les propriétés élémentaires de cette transformation. Puis nous introduisons l'opération de convolution afin d'établir la formule de Fourier inverse. Nous achèverons enfin ce chapitre par l'extension de la transformation de Fourier à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ via le théorème de Plancherel.

I Transformation de Fourier des fonctions intégrables

1. Rappels sur l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Nous commençons par rappeler la notion de fonctions intégrables au sens de la théorie de la mesure, puis la définition de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$, et les principales propriétés de cet espace. Dans la suite, toutes les fonctions considérées seront supposées mesurables au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous renverrons au cours de théorie de la mesure pour la définition de cette mesure et celle des fonctions mesurables associées. Rappelons que les fonctions continues ou continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables. Rappelons aussi que l'intégrale (de Lebesgue) d'une fonction mesurable positive a un sens, et que sa valeur est soit égale à un nombre réel positif, soit à $+\infty$.

a. Fonctions intégrables et espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une fonction mesurable. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ est finie.

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $-2 \leq x \leq 2$, et 0 sinon. La fonction f est continue par morceaux, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-2}^2 1 dx = 2 < +\infty$; d'où l'intégrabilité de la fonction f .

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2 < +\infty$; d'où l'intégrabilité de la fonction f .

L'ensemble des fonctions intégrables $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour l'addition et le produit externe définis par:

$$\begin{cases} \forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Il est naturel de chercher à munir cet espace vectoriel d'une structure d'espace vectoriel normé. La quantité N_2 définie par:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), N_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

est bien définie sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elle satisfait:

- (i) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), N_2(f) \geq 0$,
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f)$,
- (iii) $\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)$.

Par contre, nous observons aussi que:

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), N_2(f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$,
 ce qui signifie que l'application N_2 n'est pas une norme sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, puisqu'elle peut s'annuler sans que la fonction considérée ne soit nulle.

Observons que cette difficulté est exactement la même que celle qui conduit à la définition de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et nous la contournerons de façon identique. Nous introduisons la relation d'équivalence:

$\forall (f, g) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $f \sim g \Leftrightarrow$ p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$,
et nous notons $\dot{f}$ la classe d'équivalence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$
pour cette relation, soit l'ensemble:

$$\dot{f} = \{g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ t.q. } g \sim f\}.$$

Nous définissons alors l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation:

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{\dot{f}, f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})\}.$$

Cet ensemble conserve une structure de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour la somme et le produit externe:

$$\begin{cases} \forall (\dot{f}, \dot{g}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \dot{f} + \dot{g} = (\dot{f} + \dot{g}), \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall \dot{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \lambda \dot{f} = (\lambda \dot{f}). \end{cases}$$

Observons ici que ces deux opérations sont bien définies, puisque:

$$\begin{cases} \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4, f_1 \sim f_2 \text{ et } g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, f_1 \sim f_2 \Rightarrow \lambda f_1 \sim \lambda f_2. \end{cases}$$

De façon similaire, l'application $\|\cdot\|_2$ définie par:

$$\forall \dot{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|\dot{f}\|_2 = N_2(f),$$

est bien définie. En effet, lorsque $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ satisfait $f_1 \sim f_2$, nous avons:

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, |f_1(x)| = |f_2(x)|,$$

de sorte que:

$$N_2(f_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^2 dx = N_2(f_2).$$

De plus, cette application continue $\bar{\cdot}$ satisfait:

- (i) $\forall \dot{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|\dot{f}\|_2 = N_2(f) \geq 0$,
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall \dot{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|\lambda \dot{f}\|_2 = N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f) = |\lambda| \|\dot{f}\|_2$,
- (iii) $\forall (\dot{f}, \dot{g}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \|\dot{f} + \dot{g}\|_2 = N_2(f + g) \leq N_2(f) + N_2(g) \leq \|\dot{f}\|_2 + \|\dot{g}\|_2$.

Par contre, elle vérifie aussi:

$$\forall \dot{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|\dot{f}\|_2 = 0 \Leftrightarrow N_2(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0}.$$

Comme la classe d'équivalence $\dot{0}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, l'application $\|\cdot\|_2$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, qui le munit donc d'une structure d'espace vectoriel normé.

En pratique, il n'est pas si facile de manipuler les classes de fonctions qui constituent l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Il est préférable de continuer à manipuler les fonctions qui composent ces classes. Dans la suite, nous identifions ces classes avec l'une des fonctions (en choisissant la plus simple possible) qui les compose. Autrement dit, nous considérons l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ non pas comme un espace de classes de fonctions, mais comme un espace de fonctions. Une fonction f dans cet espace est connue dès que sa valeur sur un ensemble de mesure pleine est connue, et deux fonctions f et g sont égales dès qu'elles sont égales presque partout.

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ si $-1 \leq x \leq 1$, 0 sinon. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 2 < +\infty$. Elle définit donc une fonction de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon. Comme $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable, donc de mesure nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à la fonction nulle dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Avec cet abus de langage, l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ satisfait:

Thm: L'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ -espace vectoriel normé par la norme:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dém: Voir les explications ci-dessus pour la preuve de ce théorème.

Def: Soit Ω un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle). La définition et le théorème précédents s'adaptent à l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions intégrables sur l'ensemble Ω , qui est un $\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ -espace vectoriel normé par la norme:

$$\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ex: Soit $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, $f(x) = \ln|x|$. La fonction f est bien définie et mesurable (car continue) sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$, et elle satisfait: $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 |\ln|x||^2 dx < +\infty$. Elle définit donc sans ambiguïté une fonction de $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ (même si sa valeur en 0 n'est pas définie), puisque $[-1, 0[\cup]0, 1]$ est un sous-ensemble de mesure pleine de $[-1, 1]$.

6. Théorème de convergence dominée et intégrales à paramètres

Dans la suite, la transformation de Fourier d'une fonction intégrable est définie comme une intégrale à paramètres. L'analyse des propriétés de continuité et de dérivabilité de cette intégrale repose sur le théorème de convergence dominée (de Lebesgue).

Théorème de convergence dominée (de Lebesgue): Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Supposons que:

(i) Il existe une fonction $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que:

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_0(x).$$

(ii) Il existe une fonction $F \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que:

$$\forall n \geq 0, \text{ p.p.t. } x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq F(x).$$

Alors la fonction f_0 est mesurable sur $\mathbb{R}$ et elle définit une fonction de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. De même, les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définissent des fonctions de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx.$$

Dém.: (i) Comme $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_0(x)$ p.p. sur $\mathbb{R}$, la fonction f_0 est mesurable sur $\mathbb{R}$. Sachant que p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq F(x)$, à la limite $n \rightarrow +\infty$, $|f_0(x)| \leq F(x)$; comme $F \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $\forall n \geq 0$, $f_n \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et $f_0 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(ii) Soit $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = 2F(x) - |f_n(x) - f_0(x)|$; les fonctions g_n appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) \geq 2F(x) - |f_n(x) - f_0(x)| \geq 0$; par la lemme de Fatou, $\int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx$; par convergence presque partout, $\int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$, tandis que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_0(x)| dx$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_0(x)| dx = 0$, puis $|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_0(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ex.: Soit $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2 \frac{i x}{n+x^2}}{1+x^2}$; les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, et elles satisfont: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq f_0(x)$; comme la

fonction f_∞ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Rem: (i) L'hypothèse (ii) du théorème de convergence dominée est appelée hypothèse de domination. La fonction F qui domine la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ doit être indépendante de n .

(ii) La preuve du théorème de convergence dominée assure que :

$$\|f_n - f_\infty\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_\infty(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est donc convergente dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ de limite égale à la fonction f_∞ .

(iii) Le théorème de convergence dominée reste valable lorsque les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, f_∞ et F sont définies sur un sous-ensemble mesurable Ω de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) e^{-x}$; Les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}_+$, et elles satisfont: $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_\infty(x) = x e^{-x}$, et $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x)| \leq x e^{-x} = F(x)$; comme la fonction F appartient à $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

Le théorème de convergence dominée permet d'établir la continuité de certaines intégrales à paramètres.

Théorème de continuité des intégrales à paramètres: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Considérons

une fonction $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

- (i) $\forall t \in I$, l'application $f(t, \cdot): x \mapsto f(t, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.
- (ii) p.p. $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot, x): t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I .
- (iii) Il existe une fonction $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall t \in I, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, |f(t, x)| \leq G(x).$$

La fonction F définie par :

$$\forall t \in I, F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx,$$

est alors bien définie et continue sur l'intervalle I .

Dém.: (i) Comme $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et $\forall t \in I$, p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $|f(t, x)| \leq G(x)$, les fonctions $f(t, \cdot)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, de sorte que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx$ ont un sens, et la fonction F est bien définie sur I .

(ii) Soit alors $t_* \in I$, et $(t_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \rightarrow t_*$; comme p.p. $t, x \in I$, $f(t_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t_*, x)$, et $\forall n \geq 0$, p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $|f(t_n, x)| \leq G(x)$, par le théorème de convergence dominée, $F(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(t_*) \Rightarrow F$ est continue en t_* , donc sur I .

Ex.: Soit $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = \frac{e^{itx}}{1+x^2}$; les fonctions $f(t, \cdot)$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, tandis que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(\cdot, x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t, x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F donnée par: $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Thém.: Le théorème de continuité des intégrales à paramètres reste valable lorsque les fonctions f et G sont définies sur $I \times \Omega$, respectivement sur Ω , où Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex.: Soit $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $f(t, x) = \sin(x) e^{itx}$; les fonctions $f(t, \cdot)$ sont continues, donc mesurables sur $[-1, 1]$, tandis que, quel que soit $x \in [-1, 1]$, les fonctions $f(\cdot, x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$; comme $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $|f(t, x)| \leq 1$, et la fonction $x \mapsto 1$ appartient à $L^1([-1, 1], \mathbb{R}_+)$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F donnée par: $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-1}^1 \sin(x) e^{itx} dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée permet aussi de montrer la dérivabilité de certaines intégrales à paramètres.

Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons une fonction $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que:

(i) $\forall t \in I$, l'application $f(t, \cdot): x \mapsto f(t, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.

(ii) p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot, x) : t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I .

(iii) Il existe une fonction $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall t \in I, \text{ p.p. } t, x \in \mathbb{R}, |f(t, x)| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq G(x).$$

La fonction F donnée par :

$$\forall t \in I, F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx,$$

est alors bien définie, continue et dérivable sur I , avec :

$$\forall t \in I, F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

De plus, si p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

Dém. (i) Comme $G \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et $\forall t \in I$, p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $|f(t, x)| \leq G(x)$, les fonctions $f(t, \cdot)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et la fonction F est bien définie sur I .

(ii) Comme p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ est dérivable, donc continue sur I , par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est continue sur I .

(iii) Soit alors $t_* \in I$ et $(t_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ t.q. $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t_*$; comme p.p. $t, x \in I$, $\frac{f(t_n, x) - f(t_*, x)}{t_n - t_*} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\partial f}{\partial t}(t_*, x)$, et par le théorème des accroissements finis, $\forall n \geq 0$, p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{f(t_n, x) - f(t_*, x)}{t_n - t_*} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\theta_n, x) \right| \leq G(x)$, par le théorème de convergence dominée, $\frac{F(t_n) - F(t_*)}{t_n - t_*} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t_*, x) dx$ $\Rightarrow F$ est dérivable sur I , et : $\forall t \in I, F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$.

(iv) Puisque les fonctions $f(\cdot, x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , les fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ sont continues sur I pour presque tout $x \in \mathbb{R}$; comme $\forall t \in I$, p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq G(x)$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F' est continue sur I , de sorte que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

Ex. Soit $\forall(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = e^{-x^2} e^{itx}$; les fonctions $f(t, \cdot)$ sont continues, donc mesurables sur $\mathbb{R}$, tandis que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $f(\cdot, x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; comme $\forall(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t, x)| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq (1 + |x|) e^{-x^2}$, et la fonction $x \mapsto (1 + |x|) e^{-x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, la fonction F donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{itx} dx$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{-x^2} e^{itx} dx$.

Thém: Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres reste valable lorsque les fonctions f et G sont définies sur $I \times \mathbb{R}$, respectivement sur $\mathbb{R}$, où I est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de mesure de Lebesgue non nulle).

Ex: Soit $\psi(t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $\lambda(t, x) = \sin(x) e^{itx}$; les fonctions $f(t, \cdot)$ sont continues, donc mesurables sur $[-1, 1]$, tandis que, quelque soit $x \in [-1, 1]$, les fonctions $f(\cdot, x)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; comme $\psi(t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $|f(t, x)| + |\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq 1 + |x|$, et la fonction $x \mapsto 1 + |x|$ appartenant à $L^1([-1, 1], \mathbb{R}_+)$, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, la fonction F définie par: $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-1}^1 \sin(x) e^{itx} dx$ est bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = \int_{-1}^1 ix \sin(x) e^{itx} dx$.

c. Propriétés fonctionnelles de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$.

Nous commençons par démontrer que l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est complet.

Théorème de Fréchet - Fischer: L'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Dém: (i) Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Par définition: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0$ t.q. $\forall m \geq N, \forall n \geq N, \|f_m - f_n\|_2 \leq \varepsilon$; par récurrence sur $i \geq 0$, nous construisons une suite strictement croissante $(N_i)_{i \geq 0}$ t.q. $\forall i \geq 0, \forall m \geq N_i, \forall n \geq N_i, \|f_m - f_n\|_2 \leq 2^{-i} \Rightarrow \forall i \geq 0, \|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_2 \leq 2^{-i}$.

(ii) Posons: $\forall i \geq 0, E_i = \sum_{k=0}^i |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|$. Les fonctions E_i sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont par l'inégalité triangulaire: $\|E_i\|_1 \leq \sum_{k=0}^i \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_1 \leq \sum_{k=0}^i 2^{-k} \leq 2$. Par le lemme de Beppo Levi, la fonction $E = \sum_{k=0}^{+\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} |E(x)| dx \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_i(x)| dx \leq 2$; en particulier, la fonction E est finie presque partout et appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iii) Sachant que E est finie presque partout, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} (f_{N_{i+1}} - f_{N_i})$

est absolument convergente, donc convergente presque partout sur $\mathbb{R}$. Notons f_∞ sa limite, qui est donc bien définie presque partout sur $\mathbb{R}$ (et définit donc une classe de fonctions à égalité presque partout près); comme $\forall i \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$,
 $|f_{n_0}(x)| + \sum_{k=0}^i |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |F(x)|$, à la limite $i \rightarrow +\infty$,
 $|f_\infty(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |F(x)|$; sachant que f_{n_0} et F sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$,
 $f_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$.

(iv) Sachant que $|f_n(x) - f_{n_k}(x)| = |f_n(x) - f_{n_0}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} |f_n(x) - f_\infty(x)|$ p.p., et p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + F(x)$, avec $(f_n - f_{n_0}, F) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})^2$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_{n_k}(x)| dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_\infty(x)| dx$, d'où: $\forall n \geq N_i$, $\|f_n - f_\infty\|_2 \leq 2^{-i} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f_\infty$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$, ce qui assure la complétude de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$.

La preuve de la complétude de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$ conduit à la réciproque suivante du théorème de convergence dominée.

Cor. Considérons une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$ convergente de limite $f_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$. Alors il existe une extraction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et une fonction $F \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$ telles que:

- (i) $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f_\infty$ p.p. sur $\mathbb{R}$,
- (ii) $\forall n \geq 0$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq F(x)$.

Dém. Comme la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$, elle est de Cauchy dans cet espace; avec les notations de la preuve du théorème précédent, l'extraction φ définie par: $\forall i \geq 0$, $\varphi(i) = n_i$ satisfait: p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f_{\varphi(i)}(x) \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{} f_\infty(x)$, et $|f_{\varphi(i)}(x)| \leq |f_{\varphi(0)}(x)| + F(x)$. Il suffit de choisir la fonction F comme le second membre de cette inégalité (avec un changement de notation adapté) pour conclure la preuve du corollaire.

Rem. Lorsque Ω est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (de même de $\mathbb{R}$ lorsque non nulle), l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega, \mathcal{M} \text{ ou } \mathcal{G})$ demeure un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_2$, et la réciproque précédente du théorème de convergence do-

minée reste valable.

Il n'est pas toujours simple de manipuler des fonctions mesurables arbitraires de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et il est parfois plus facile de se restreindre dans un premier temps à des fonctions plus régulières, par exemple au moins continues. Cette approche est rendue possible par le fait que le sous-espace vectoriel des fonctions continues à support compact est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Déf: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$. La fonction f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$ si:

(i) la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) il existe un nombre $R > 0$ tel que:

$$\forall x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[, f(x) = 0.$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $x \leq -1$, $x+1$ si $-1 \leq x \leq 0$, $1-x$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 si $x \geq 1$. La fonction f est bien définie et continue à support compact sur $\mathbb{R}$, puisque: $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, f(x) = 0$.

Prop: L'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém: (i) Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; f est mesurable, car continue sur $\mathbb{R}$, et il existe $R > 0$ t.q. $\forall |x| > R$, $f(x) = 0$; comme f est continue sur $[-R, R]$, il existe $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-R}^R |f(x)|^2 dx \leq 2MR \Rightarrow f$ s'identifie à une fonction de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$, et $(f, g) \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$; par les opérations élémentaires, $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$, et si $\forall |x| > R_1$, $f(x) = 0$, et $\forall |x| > R_2$, $g(x) = 0$, alors $\forall |x| > \max\{R_1, R_2\}$, $\lambda f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \Rightarrow \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Rem: En pratique, il est plus exact d'affirmer que $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Néanmoins, lorsqu'une fonction de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ admet un représentant continu à support compact, il est naturel de l'identifier à ce représentant (qui est la meilleure en terme de régularité).

Thm: Le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, autrement dit, quel que soit la fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ continues à support compact sur $\mathbb{R}$ telles que:

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém: La preuve de ce résultat repose sur des propriétés fines de la mesure de Lebesgue et sera ici admise.

Thm: (i) Ce résultat demeure vrai dans un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}$: Le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ définie par: $\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Ce résultat s'étend de plus à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, ainsi qu'aux espaces de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, lorsque Ω est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$: Le sous-espace $\mathcal{C}_c^0(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ définie par: $\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

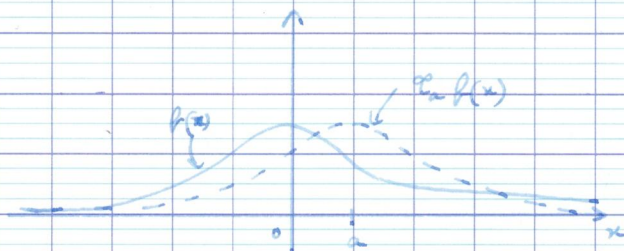
La densité des fonctions continues à support compact permet de montrer la continuité des translations dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ (et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$) par un argument dit de densité.

Déf: Soit $a \in \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la translation de paramètre a de la fonction f est définie par:

$$\text{p.p.t } x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}_a f(x) = f(x-a).$$

La fonction $\mathcal{T}_a$ est bien définie par cette expression et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém:



Comme f est mesurable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\mathcal{T}_a f$ est bien définie et mesurable (presque partout) sur $\mathbb{R}$; par le changement de variable $y = x - a$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{T}_a f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy < +\infty \Rightarrow \tau_a f \text{ définit une fonction de } L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure}).$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$; la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \tau_a f(x) = e^{-(x-a)^2}$.

Cher: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$. L'application translation $a \mapsto \tau_a f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$:

$$\forall a_0 \in \mathbb{R}, \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a) - f(x-a_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

Dém: (i) Supposons d'abord que f est continue à support compact sur $\mathbb{R}$; il existe $R > 0$

t.q. $\forall |x| > R, f(x) = 0$; si $|a - a_0| \leq 1$, alors: $\forall x \in]-\infty, a_0 - R - 1[\cup$

$$]a_0 + R + 1, +\infty[, f(x-a) = f(x-a_0) = 0 \Rightarrow \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 = \left(\int_{a_0 - R - 1}^{a_0 + R + 1} |f(x-a) - f(x-a_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

; comme f est continue sur $[-R-1, R+1]$, elle est uniformément continue sur ce segment $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall (y, z) \in [-R-1, R+1]^2, |y-z| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2(R+1)}$; si $\delta \leq 1$, alors,

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, |y-z| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2(R+1)}; \text{ lorsque } |a - a_0| \leq \delta,$$

$$\forall x \in (a_0 - R - 1, a_0 + R + 1), |x-a - (x-a_0)| = |a - a_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x-a) - f(x-a_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2(R+1)}$$

$$\Rightarrow \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 \leq \left(\int_{a_0 - R - 1}^{a_0 + R + 1} \frac{\varepsilon^2}{4(R+1)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \Rightarrow \text{L'application}$$

$a \mapsto \tau_a f$ est continue en a_0 , donc sur $\mathbb{R}$.

(ii) Dans le cas général, le théorème de densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}, \text{Mesure})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$

assure que: $\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \text{Mesure})$ t.q. $\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$; com-

me $\forall a \in \mathbb{R}, \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 \leq \|\tau_a f - \tau_a f_\varepsilon\|_2 + \|\tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon\|_2$

$$+ \|\tau_{a_0} f_\varepsilon - \tau_{a_0} f\|_2, \text{ et } \|\tau_{a_0} f_\varepsilon - \tau_{a_0} f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a_0) - f_\varepsilon(x-a_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f_\varepsilon(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|f - f_\varepsilon\|_2$$

par le changement de variable $y = x - a_0$, $\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 \leq 2\varepsilon + \|\tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon\|_2$;

par la première étape, comme $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \text{Mesure})$, $\forall \delta > 0$ t.q. $\forall a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta), \|\tau_a f_\varepsilon - \tau_{a_0} f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon \Rightarrow \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 \leq 3\varepsilon \Rightarrow$ L'appli-

cation $a \mapsto \tau_a f$ est continue en a_0 , donc sur $\mathbb{R}$.

Rem: Ce résultat s'étend à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$: lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$, les mêmes preuves assurent que l'application translation $a \mapsto \tau_a f$ est bien définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mesure})$: $\forall a_0 \in \mathbb{R},$

$$\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a) - f(x-a_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

2. Définition et propriétés de la transformation de Fourier de fonctions intégrables

a. Définition et exemples

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est définie comme l'intégrale à paramètre:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée, continue et de limite nulle en $\pm\infty$.

Exm: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Posons:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait:

$$(i) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

$$(ii) \quad \hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Dém: (i) Soit $\forall \xi \in \mathbb{R}$, p.p. $x \in \mathbb{R}$, $g(\xi, x) = f(x) e^{-i\xi x}$; comme f est mesurable sur $\mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto g(\xi, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, et par continuité de la fonction exponentielle, p.p. $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto g(\xi, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, p.p. $x \in \mathbb{R}$, $|g(\xi, x)| \leq |f(x)|$, et que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la transformée de Fourier $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i\xi x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1$.

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \text{Soit } \xi \neq 0; \text{ comme } e^{-i\pi} = -1, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} e^{-i\pi} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi(x + \frac{\pi}{\xi})} dx, \text{ d'où par le changement de variables } \\ & y = x + \frac{\pi}{\xi}, \quad \hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - \frac{\pi}{\xi}) e^{-i\xi y} dy \Rightarrow \hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y) - f(y - \frac{\pi}{\xi})) e^{-i\xi y} dy \\ & \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f(y - \frac{\pi}{\xi})| dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - \tau_{\frac{\pi}{\xi}} f\|_1; \text{ sachant que } f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \|f - \tau_{\frac{\pi}{\xi}} f\|_1 \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0 \\ & \Rightarrow \hat{f}(\xi) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dém: (i) Soulignons ici que, bien que la valeur de la fonction f ne soit connue que

presque partout, la valeur de sa transformée de Fourier $\hat{f}$ a un sens en tout point de $\mathbb{R}$.

(ii) Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ qui apparaît dans la définition de la transformée de Fourier $\hat{f}$ est un coefficient de normalisation qui permet une écriture symétrique de la formule de Fourier inverse; d'autres choix sont possibles, en particulier celui où ce coefficient est omis, autrement dit lorsque la transformée de Fourier est définie via la formule: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

Ex: (i) Fonction caractéristique du segment $[-1, 1]$: soit p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $-1 \leq x \leq 1$, 0 sinon; la fonction f appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier vaut: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $\xi = 0$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ si $\xi \neq 0$; à l'aide de la fonction sinus cardinal définie par: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \text{si } \xi = 0, \frac{\sin(\xi)}{\xi} = 1$ si $\xi \neq 0$, cette expression est égale à: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{si}(\xi)$.

(ii) Fonction exponentielle décroissante: Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction g_α définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, g_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$; la fonction g_α appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier vaut: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(x-i\xi)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(x+i\xi)x} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{\alpha - i\xi} + \frac{2}{\alpha + i\xi} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$.

Un exemple important de transformée de Fourier est celle d'une fonction gaussienne définie par la formule:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2},$$

pour un paramètre $\alpha > 0$. Afin de calculer la transformation de Fourier de la fonction g_α , nous commencerons par déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss.

Prop. Soit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$. La fonction gaussienne g appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dém: Considérons la fonction: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t+i\xi)x^2}}{1+t^2} dt$; comme la fonction $(t, x) \mapsto \frac{e^{-(t+i\xi)x^2}}{1+t^2}$ est de classe C^∞ sur $(0, 1) \times \mathbb{R}$, le théorème de dérivation sous le signe intégral assure que φ est de classe

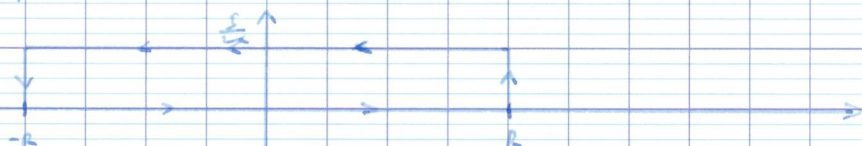
E^∞ sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi(u) = -2u \int_0^1 e^{-(1+t^2)u^2} dt \stackrel{y=tx}{=} -2 \int_0^u e^{-u^2} e^{-t^2} dt$
 $= -\left(\int_0^u e^{-u^2} dt\right)^2 \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(0) - \left(\int_0^u e^{-u^2} dt\right)^2$; sachant que $\varphi(0) = \int_0^2$
 $\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$, et $|\varphi(u)| \leq e^{-u^2} \int_0^2 \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$.

Rem: Soit $\alpha > 0$. La fonction gaussienne g_α appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est égale à:

$$\forall f \in \mathbb{R}, \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

Dém: (i) Comme g_α est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous pouvons écrire: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} e^{-i\xi u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} e^{-\alpha(x + \frac{i\xi}{2\alpha})^2} du$

(ii) Sachant que la fonction g_α s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, nous pouvons appliquer le théorème des résidus au contour:



afin d'obtenir: $\int_{-R}^R e^{-\alpha(x + \frac{i\xi}{2\alpha})^2} dx = \int_{-R}^R e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+y)^2} dy$
 $= \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(-R + \frac{\xi}{2\alpha} - y)^2} dy$; sachant que $|\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+y)^2} dy| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha R^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$
et de même, $|\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(-R + \frac{\xi}{2\alpha} - y)^2} dy| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R - \frac{\xi}{2\alpha})^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ lorsque $\xi > 0$,
nous obtenons la limite $R \rightarrow +\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x + \frac{i\xi}{2\alpha})^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \Rightarrow \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$

(iii) La preuve est identique lorsque $\xi < 0$; dans le cas où $\xi = 0$, nous avons directement

$$\hat{g}_\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Dém: La transformée de Fourier $\hat{g}_\alpha$ de la fonction gaussienne g_α est donc, à un facteur multiplicatif près, une gaussienne: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$

6. Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie par:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \mathcal{F}(f) = \hat{f},$$

est une application linéaire continue.

Rem: Soit $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ dans l'espace des fonctions continues de limite nulle en $\pm\infty$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Déf: (i) L'application $\mathcal{F}$ est bien définie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et par linéarité de l'intégrale, $\mathcal{F}$ est linéaire.

(ii) Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_0) = \mathcal{F}(f - f_0) \Rightarrow \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_0)\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |(\hat{f} - \hat{f}_0)(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - f_0\|_2 \xrightarrow{f \rightarrow f_0} 0$, d'où la continuité de $\mathcal{F}$ en f_0 , puis sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|} - 3e^{-x^2}$; la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par linéarité de la transformation de Fourier: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} - 3 \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{e}}$.

La transformation de Fourier satisfait de plus aux propriétés de symétrie suivante.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. La fonction $\bar{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elle satisfait:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

En particulier, si la fonction f est à valeurs réelles, alors:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

Déf: En effet: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx = \overline{\hat{f}(-\xi)}$; lorsque f est réelle, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} = \widehat{\bar{f}}(\xi)$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|x|}$; la fonction f est à valeurs réelles, et sa transformée de Fourier satisfait: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{4+\xi^2} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) Posons: $p, t, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et sa transformée de Fourier est égale à:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(-\xi).$$

(ii) Si f est paire, respectivement impaire, alors, $\hat{f}$ est paire, respectivement impaire.

(iiv) Si f est réelle et paire, alors, $\hat{f}$ est réelle et paire.

Dém. En effet: $\forall s \in \mathbb{R}, \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixs} dx \stackrel{y=-x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iys} dy = \hat{f}(s)$;

si f est (inv)paire, alors, $f = (-1)^n g \Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}, \hat{f}(s) = (-1)^n \hat{g}(-s) \Rightarrow \hat{f}$ est (inv)paire;

si f est paire et réelle, alors: $\forall s \in \mathbb{R}, \hat{f}(s) = \hat{\bar{f}}(s)$ et $\overline{\hat{f}(s)} = \widehat{\bar{f}(s)} = \widehat{\bar{f}}(s) \Rightarrow \hat{f}$ est paire et réelle.

Ex. Soit $a \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$, 0 sinon; f est réelle et paire, avec:
 $\forall s \in \mathbb{R}, \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi}} \operatorname{sinc}(s)$; en particulier, $\hat{f}$ est aussi réelle et paire.

Les transformées de Fourier d'une fonction translatée ou d'une fonction dilatée sont données par les formules suivantes.

Prop. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) Soons:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \tau_a f(x) = f(x-a).$$

Les fonctions $\tau_a f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, \widehat{\tau_a f}(s) = e^{-ias} \hat{f}(s).$$

(ii) Soons:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_a f(x) = e^{iax} f(x).$$

Les fonctions $\mathbb{F}_a f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, \widehat{\mathbb{F}_a f}(s) = \tau_a \hat{f}(s) = \hat{f}(s-a).$$

(iii) Soons:

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Lambda_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Les fonctions $\Lambda_\lambda f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et leurs transformées de Fourier sont égales à:

$$\forall \lambda > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \widehat{\Lambda_\lambda f}(s) = \lambda \hat{f}(\lambda s).$$

Dém. Nous calculons:

$$(i) \forall s \in \mathbb{R}, \widehat{\tau_a f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-ixs} dx \stackrel{y=x-a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i(y+a)s} dy = e^{-ias} \hat{f}(s).$$

$$(iii) \forall f \in \mathcal{R}, \mathcal{F}_a \hat{f}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iay} f(x) e^{-iSx} dx = \hat{f}(S-a).$$

$$(iv) \forall f \in \mathcal{R}, \Lambda_\lambda \hat{f}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-iSx} dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iS\lambda y} dy = \lambda \hat{f}(\lambda S).$$

Ex: Considérons un segment $[a, b]$ (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, et la fonction caractéristique $\chi_{[a,b]}$ de ce segment; la fonction $\chi_{[a,b]}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et elle satisfait: $\forall f \in \mathcal{R}, \hat{\chi}_{[a,b]}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iSx} dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$ si $S=0$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i \frac{a+b}{2} S} \sin\left(\frac{b-a}{2} S\right)$, autrement dit: $\forall f \in \mathcal{R}, \hat{\chi}_{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{-i \frac{a+b}{2} S} \sin\left(\frac{b-a}{2} S\right)$.

Mais observons que: $\forall x \in \mathbb{R}, \chi_{[a,b]}(x) = \chi_{[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]} \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right)$, de sorte que:

$$\forall f \in \mathcal{R}, \hat{\chi}_{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{2} e^{-i \frac{a+b}{2} S} \hat{\chi}_{[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]} \left(\frac{b-a}{2} S \right) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{-i \frac{a+b}{2} S} \sin\left(\frac{b-a}{2} S\right).$$

Rem: Observons que, lorsque une fonction f est dilatée d'un paramètre $\lambda > 0$, sa transformée de Fourier est dilatée d'un paramètre inverse $\frac{1}{\lambda}$, autrement dit, lorsque une fonction f est concentrée autour de l'origine, respectivement étalée à l'infini, sa transformée de Fourier est étalée à l'infini, respectivement concentrée autour de l'origine. Cette propriété permet d'expliquer le principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique.

L'une des propriétés les plus utiles de la transformation de Fourier est de transformer l'équation de dérivation en une opération de multiplication.

Thm: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Alors: $\forall f \in \mathcal{R}, \hat{f}'(f) = iS \hat{f}(f)$.

Dem: Par définition: $\forall f \in \mathcal{R}, \hat{f}'(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iSx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-iSx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[f(x) e^{-iSx} \Big|_{-R}^R + iS \int_{-R}^R f(x) e^{-iSx} dx \right]$; comme $f' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(y) dy$; comme $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les limites de la fonction f en $\pm\infty$ sont nécessairement égales à 0 $\Rightarrow f(x) e^{-iSx} \Big|_{-R}^R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$; comme $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(x) e^{-iSx} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iSx} dx$, d'où à la limite $R \rightarrow +\infty$, $\hat{f}'(f) = iS \hat{f}(f)$.

Rem: (i) Par récurrence sur $k \geq 1$, nous démontrons que, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$, avec $(f, \dots, f^{(k)}) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, alors: $\forall f \in \mathcal{R}, \hat{f}^{(k)}(f) = (iS)^k \hat{f}(f)$.

(ii) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $(f, \dots, f^{(k)}) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{k+1}$, nous savons que : $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$, d'où : $|\xi|^k \widehat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$, ce qui signifie que :

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right) \text{ quand } \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Plus une fonction f est régulière, plus sa transformée de Fourier est donc décroissante à l'infini.

Ex : Soit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$; g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2xe^{-x^2}$; comme g et g' sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\xi) = \frac{i\xi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

De façon symétrique, lorsque une fonction f possède une décroissance algébrique suffisante à l'infini, sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est régulière.

Thm : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Posons :

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, g(x) = (-ix) f(x),$$

et supposons que la fonction g appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $\widehat{f}'$ est égale à :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

Dém : Posons : p.p.t. $x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, h(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x}$. p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto h(\xi, x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $\frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) (-ix) e^{-i\xi x}$, tandis que, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(\xi, x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, avec : p.p.t. $x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, |h(\xi, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |f(x)|$, et $|\frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |g(x)|$; comme f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, x) dx = \widehat{g}(\xi)$.

Ex : Soit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$; comme les fonctions g et $x \mapsto (-ix)g(x)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce que nous pouvons identifier via la formule : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

Dém : (i) Par récurrence sur $k \geq 1$, nous vérifions que, si f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et si la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall 0 \leq k \leq h, \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}^{(k)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k f(x) e^{-i\xi x} dx$.

- (ii) En particulier, plus une fonction f sera décroissante à l'infini, plus sa transformée de Fourier sera régulière.

II. Produit de convolution de fonctions intégrables

Dans la preuve de la formule de Fourier inverse, comme dans celle du théorème de Plancherel, nous ferons appel au produit de convolution de deux fonctions. Étant données des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, cette opération est définie par l'expression :

$$\text{p.p.t. } u \in \mathbb{R}, (f * g)(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u-y) g(y) dy$$

Le fait que cette expression soit bien définie n'est pas immédiat, et nous appliquerons le théorème de Fubini pour lui donner un sens, avant d'insister sur la notion d'approximations de l'identité que nous utiliserons pour les preuves de la formule de Fourier inverse et du théorème de Plancherel.

1. Définitions et exemples

a. Rappels sur le théorème de Fubini

Le théorème de Fubini est l'outil fondamental pour la manipulation des intégrales multiples. La preuve repose sur le théorème de Tonelli que nous admettons, et dont voici une version simplifiée dans le cas de l'espace produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Théorème de Tonelli: Soit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, une fonction mesurable.

- (i) p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, et mesurable.

- p.p.t. $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, et mesurable.

- (ii) Les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ sont définies

presque partout sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, +\infty)$, et mesurable.

(iii) L'égalité suivante est valable dans $[0, +\infty]$:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Dém: La preuve de ce résultat repose sur des propriétés fines de la théorie de la mesure et sera admise ici.

Ex: Soit $V(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est mesurable sur $\mathbb{R}^2$; sachant qu'elle est à valeurs positives, et que: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx = +\infty$, elle satisfait: $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx \right) dy = +\infty$.

Le théorème de Fubini s'énonce alors de la façon suivante dans le cas simplifié de l'espace produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Théorème de Fubini: Soit $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

- (i) $\left\{ \begin{array}{l} \text{p.p. } t \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } y \mapsto f(x, y) \text{ appartient à } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}). \\ \text{p.p. } y \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto f(x, y) \text{ appartient à } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}). \end{array} \right.$
- (ii) Les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$ et appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
- (iii) L'égalité suivante est valable:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Dém: (i) Notons $g = \operatorname{Re}(f)$ et $h = \operatorname{Im}(f)$; comme $|g| \leq |f|$, et $|h| \leq |f|$, les fonctions g et h sont dans $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

(ii) Considérons alors les parties positives g_+ et h_+ , et négatives g_- et h_- des fonctions g et h , de sorte que: $g = g_+ - g_-$ et $h = h_+ - h_-$; comme $|g_+| + |g_-| \leq |g|$, et $|h_+| + |h_-| \leq |h|$, les fonctions g_+, g_-, h_+ et h_- sont dans $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$.

(iii) Appliquons le théorème de Tonelli à la fonction g_+ ; comme $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_+(x, y) dx dy$ est fini, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x, y) dy \right) dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x, y) dx \right) dy < +\infty$. Les fonctions $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x, y) dx$ sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$ et appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ $\Rightarrow$ p.p. $t \in \mathbb{R}$, $y \mapsto g_+(x, y)$ et p.p. $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g_+(x, y)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

(iv) Comme (iii) reste valable pour les fonctions g_-, h_+ et h_- , et puisque $f =$

$g_+ = g_+ + i(h_+ - h_-)$, les points (i) et (ii) du Théorème de Fubini sont vérifiés, et le point (iii) découle des mêmes égalités pour les fonctions g_+, g_- , h_+ et h_- .

Dém: En pratique, appliquer le Théorème de Fubini à une fonction f consistant à vérifier qu'elle est dans $L^2(\mathbb{R}^2, \text{mes } \mathcal{L})$, ce qui passe en général par le fait de démontrer que la fonction $|f|$ vérifie les hypothèses du Théorème de Tonelli, avec au lieu $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| dx \right) dy < +\infty$, au lieu $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| dy \right) dx < +\infty$.

Ex: Soit $\psi(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{1+y^2} e^{-x^2}$; comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$, f et $|f|$ sont mesurables sur $\mathbb{R}^2$, avec: $\psi(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{1+y^2}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi$, par le Théorème de Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)| dx \right) dy \leq \pi \frac{3}{2} < +\infty \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^2, \text{mes } \mathcal{L})$, d'où par le Théorème de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xy) e^{-x^2}}{1+y^2} dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xy) e^{-x^2}}{1+y^2} dy \right) dx$.

b. Produit de convolution de deux fonctions intégrables

Considérons deux fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}, \text{mes } \mathcal{L})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}, \text{mes } \mathcal{L})$. À l'aide du Théorème de Fubini, nous pouvons définir rigoureusement leur produit de convolution. On définit donc par les formules:

$$\forall p \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

Déf: Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \text{mes } \mathcal{L})^2$.

(i) $\forall p \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y) g(y)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \text{mes } \mathcal{L})$.

(ii) Le produit de convolution $f * g$ est défini par:

$$\forall p \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$$

est bien définie presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \text{mes } \mathcal{L})$, avec:

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Dém: Considérons la fonction h définie par: $\forall p \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x,y) = f(x-y) g(y)$.

(i) Supposons que f et g soient des représentants bornés des fonctions f et g ;

dans ce cas, par produit et composition, la fonction h est borélienne, donc mesurable, d'où la mesurabilité de la fonction $|h|$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x,y)| dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(y)| dy \right) |g(x)| dx = \|h\|_2 \|g\|_2 < +\infty$, par le théorème de Fubini, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y) g(y)$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et la fonction $f * g$ est bien définie presque partout et appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y) g(y)| dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y) g(y)| dx \right) dy = \|f\|_2 \|g\|_2 \Rightarrow \|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Ex: Soit $(a,b) \in]0, +\infty[^2$. Considérons les fonctions g_a et g_b définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}, \text{ et } g_b(x) = e^{-bx^2}.$$

Les fonctions g_a et g_b sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de sorte que leur produit de convolution $g_a * g_b$ est bien définie presque partout, et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec:

$$\begin{aligned} \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, g_a * g_b(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-y)^2} e^{-by^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-(a+b)y^2} dy \\ &+ 2axy dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-(a+b)(y - \frac{a}{a+b}x)^2} e^{-\frac{a^2}{a+b}x^2} dy = \frac{1}{\sqrt{a+b}} e^{-(a - \frac{a^2}{a+b})x^2} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy &= \sqrt{\pi} e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}, \text{ d'où la formule: } z = \sqrt{a+b} \left(y - \frac{a}{a+b}x \right) \end{aligned}$$

$$\text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, g_a * g_b(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} g_{\frac{ab}{a+b}}(x),$$

qui est en fait valable sur $\mathbb{R}$, compte tenu du fait que les fonctions à droite et à gauche de cette identité sont continues.

Le produit de convolution possède les propriétés élémentaires suivantes:

Prop: (i) Le produit de convolution est une application bilinéaire de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4, (\lambda f_1 + \mu f_2) * (g_1 + g_2) = \lambda f_1 * g_1 + \lambda f_1 * g_2 + \mu f_2 * g_1 + \mu f_2 * g_2.$$

(ii) Le produit de convolution est une opération commutative sur les fonctions intégrables:

$$\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, f * g = g * f.$$

Dém: (i) résulte de la linéarité de l'intégrale; pour (ii), par la définition du produit de convolution, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $y \mapsto f(x-y) g(y)$ et $y \mapsto g(x-y) f(y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy = (g * f)(x).$$

$z = x - y$

Ex: Soit $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}$; d'où la formule précédente, $\forall (a, b) \in]0, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}, g_a * g_b(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} g_{\frac{ab}{a+b}}(x) = g_b * g_a(x)$.

La transformation de Fourier transforme le produit de convolution de deux fonctions intégrables en produit (classique) de leurs transformées de Fourier.

Prop: Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \text{Reals})^2$. La transformée de Fourier du produit de convolution $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f * g}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

Dém: Comme la fonction $f * g$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \text{Reals})$, sa transformation de Fourier est bien définie sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-i\xi x} dx$; comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}, \text{Reals})$, nous dedisons du Théorème de Fubini que: $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) g(y)| e^{-i\xi x} dx dy \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| dx \right) dy \stackrel{y=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \right) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$; par le Théorème de Fubini, nous avons alors: $\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) e^{-i\xi(x-y)} dy \right) e^{-i\xi y} dy \stackrel{y=x-y}{=} \widehat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\xi y} dy = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Ex: Soit $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}$; sachant que $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, et que $\forall (a, b) \in]0, +\infty[$, $g_a * g_b = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} g_{\frac{ab}{a+b}}$, nous vérifions que: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g_a * g_b}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \widehat{g_{\frac{ab}{a+b}}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{a+b}}} e^{-\frac{\xi^2}{4 \frac{ab}{a+b}}} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b}\right) \xi^2} = \sqrt{2\pi} \widehat{g_a}(\xi) \widehat{g_b}(\xi)$.

Dém: À l'aide de la formule de Fourier inverse, il est possible de montrer (sous des hypothèses à préciser) que la transformée de Fourier d'un produit (classique) de deux fonctions est (à un facteur multiplicatif près) le produit de convolution de leurs transformées de Fourier.

c. Extension aux fonctions de carré intégrable

Nous pouvons étendre la définition du produit de convolution à deux fonctions f et g , dont l'une appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \text{Reals})$, et l'autre à l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}, \text{Reals})$.

Chm: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) p.p. $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Le produit de convolution $f * g$ défini par:

$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec:

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Dem: (i) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^{\frac{1}{2}} |g(y)|^{\frac{1}{2}} |f(x-y)|^{\frac{1}{2}} |g(y)|^{\frac{1}{2}} dy \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^2 |g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right)^2 \leq \|g\|_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^2 |g(y)|^2 dy$; comme $|f|^2 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ et $|g| \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, le produit de convolution $|f|^2 * |g|$ est bien défini presque partout et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$; en particulier, p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy < +\infty$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right)^2 dx \leq \|g\|_2^2 \| |f|^2 * |g| \|_2 \leq \|g\|_2^2 \| |f|^2 \|_2 = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$.

(ii) En particulier, p.p. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \Rightarrow x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \text{ appartient à } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ avec: } \|f * g\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \right)^2 dx \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \Rightarrow \|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Ex: Soit $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}$; étant donné $a > 0$ et $b > 0$, g_a et g_b sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, respectivement dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et nous vérifions que $g_a * g_b = \sqrt{\frac{a+b}{ab}} g_{\frac{a+b}{ab}}$ est bien dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dem: (i) De façon symétrique, le produit de convolution $f * g$ de fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est bien défini presque partout sur $\mathbb{R}$, et appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. De plus, ce produit de convolution reste commutatif au sens où:

$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R}, f * g(x) = g * f(x).$$

(ii) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Le produit de convolution $f * g$ demeure bien défini presque partout lorsque la fonction f est dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et la fonction g est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. De plus, la fonction $f * g$ appartient alors à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iii) Cette dernière assertion est un cas particulier du théorème de Young qui assure que le produit de convolution $f * g$ est bien défini (au moins presque partout) lorsque la fonction f est dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et la fonction g ,

dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec $1 \leq p, q, s$ ou tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Dans ce cas, la fonction $f \otimes g$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ si le nombre s est défini par la relation $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. De plus, sa norme satisfait:

$$\|f \otimes g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2. Approximations de l'identité

a. Définition et exemples

Def: Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité (ou suite approchée) de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ si:

(i) $\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx = 1.$

(ii) Il existe un nombre $C \geq 0$ tel que:

$$\forall n \geq 0, \|p_n\|_2 \leq C.$$

(iii) Quel que soit le nombre $\delta > 0$,

$$\int_{|x| \geq \delta} |p_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \frac{n+1}{2} e^{-(n+1)|x|}$. Les fonctions $(p_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et satisfont:

(i) $\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} dy = 1.$

(ii) $\forall n \geq 0, \|p_n\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx = 1.$

(iii) $\forall \delta > 0, \forall n \geq 0, \int_{|x| \geq \delta} |p_n(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{|y| \geq (n+1)\delta} e^{-|y|} dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est donc une approximation de l'identité: l'approximation de Laplace.

Rem: La condition (ii) de la définition précédente est parfois remplacée par la propriété que les fonctions $(p_n)_{n \geq 0}$ sont positives. Dans ce cas, la condition (ii) est une conséquence de la condition (i), puisqu'alors:

$$\forall n \geq 0, \|p_n\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx = 1.$$

L'exemple précédent appartient à la classe générale suivante d'approximations de l'identité.

Prop: Soit $p \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Considérons une suite strictement positive $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telle que:

$$\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

et posons:

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \lambda_n p(\lambda_n x).$$

La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém: Comme $p \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions p_n sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec:

$$\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx \stackrel{y = \lambda_n x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1, \text{ et } \|p_n\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(y)| dy = \|p\|_2;$$

enfin, $\forall \delta > 0, \int_{|x| \geq \delta} |p_n(x)| dx \stackrel{y = \lambda_n x}{=} \int_{|y| \geq \lambda_n \delta} |p(y)| dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow (p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité.

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \sqrt{\frac{n+2}{\pi}} e^{-(n+2)x^2}$. Sachant que $p: x \mapsto p(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$, et que $\sqrt{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est l'approximation de Gauss.

b. Théorème de convergence des approximations de l'identité

Le thème d'approximations de l'identité provient du théorème de convergence suivant.

Théor: Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * p_n$ sont bien définies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et elles satisfont:

$$\|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Dém: (i) Comme les fonctions p_n sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * p_n$ sont bien définies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Soit alors $\delta > 0; \forall n \geq 0, \|f * p_n - f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) p_n(y) dy - f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$; sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(y) dy = 1$, $\|f * p_n - f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(x)) p_n(y) dy \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |p_n(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)| |p_n(y)| dy \right) dx$; par le théorème de Bessel, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)| |p_n(y)| dy \right) dx \leq \int_{|y| \geq \delta} |p_n(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|^2 dx \right) dy \leq 2 \|f\|_2 \int_{|y| \geq \delta} |p_n(y)| dy$; de même, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |p_n(y)| dy \right) dx \leq 2 \|f\|_2 \int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| dy$.

$\int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| dy \right) dx \leq \int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| dy \right) dx \leq \int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| dy \right) dx$
 $\|f * p_n - f\|_2 \leq \sup_{|y| \leq \delta} \|f * p_n - f\|_2 \|p_n\|_2$; comme la fonction $y \mapsto$
 $\|f * p_n - f\|_2$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$
 tel que $\sup_{|y| \leq \delta} \|f * p_n - f\|_2 \leq \varepsilon \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |p_n(y)| dy \right) dx \leq$
 $\leq \|p_n\|_2 \varepsilon$; comme il existe $C > 0$ tel que $\forall n \geq 0, \|p_n\|_2 \leq C$, nous concluons
 que: $\|f * p_n - f\|_2 \leq C\varepsilon + 2\|f\|_2 \int_{|y| > \delta} |p_n(y)| dy$; sachant que $\int_{|y| > \delta} |p_n(y)|$
 $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\forall n \geq N, \|f * p_n - f\|_2 \leq (C + 2\|f\|_2) \varepsilon$
 $\Rightarrow \|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \frac{n+2}{2} e^{-\frac{n+2}{2}|x|}$, $p_n(x) \leq \frac{n+2}{2}$, $p_n(x) \geq 0$; les fonctions $(p_n)_{n \geq 0}$
 sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont: $\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) dx = \frac{n+2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n+2}{2}|x|} dx = 1$
 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x)| dx$, et $\forall \delta > 0, \forall n \geq \max\{\frac{1}{\delta}, 1, 2\}, \int_{|x| \geq \delta} |p_n(x)| dx = 0$
 $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow (p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité $\Rightarrow \forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}$
 $\text{ou } \mathbb{C}), \|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui équivaut à: $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{n+2}{2} \int_{x-\frac{1}{n+2}}^{x+\frac{1}{n+2}} f(y) dy - f(x) \right|^2 dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Rem: La suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité au sens où les convolutions $f * p_n$ convergent vers la fonction f dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 Dans cette limite, considérons les fonctions p_n approchant donc l'application identité.

Le théorème de convergence précédent s'étend à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Théorème: Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Soit donnée une
 fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * p_n$ sont bien définies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$,
 et elles satisfont:

$$\|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Démon: (i) Comme $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et que les fonctions p_n sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les
 fonctions $f * p_n$ sont bien définies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) $\forall n \geq 0, \|f * p_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) p_n(y) dy - f(x) \right|^2 dx$, d'où, pour
 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(y) dy = 1, \|f * p_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(x)) p_n(y) dy \right|^2 dx$; par
 l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|f * p_n - f\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|^2 dy \right) p_n(x) dx$.

$|p_n(y)| dy \Big] \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(y)| dy \right) dx$; soit alors $\delta > 0$; $\|f * p_n - f\|_2^2 \leq \|p_n\|_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|y| \leq \delta} |p_n(x-y) - p_n(x)|^2 |p_n(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |p_n(x-y) - p_n(x)|^2 |p_n(y)| dy \right) dx$, d'où comme dans la preuve précédente, $\|f * p_n - f\|_2^2 \leq \|p_n\|_2 \left(\sup_{|y| \leq \delta} \|p_n \cdot p - p\|_2^2 \|p_n\|_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (2 \int_{|y| > \delta} (|p_n(x-y)|^2 + |p_n(x)|^2) |p_n(y)| dy) dx \right) \leq \sup_{|y| \leq \delta} \|p_n \cdot p - p\|_2^2 \|p_n\|_2^2 + 4 \|p\|_2^2 \int_{|y| > \delta} |p_n(y)| dy$; comme l'application $y \mapsto p_n \cdot p - p$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. $\sup_{|y| \leq \delta} \|p_n \cdot p - p\|_2^2 \leq \varepsilon$; sachant que la suite $(\|p_n\|_2)_{n \geq 0}$ est bornée, et que $\int_{|y| > \delta} |p_n(y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient comme dans la preuve précédente: $\|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ex: Soit $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \frac{\sqrt{n+2}}{\pi} e^{-(n+2)x^2}$; comme la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, quelle que soit la fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\|f * p_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Rem: (i) Ce théorème de convergence s'étend aussi aux espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour $p \geq 1$: si $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et si f appartient à $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, alors les fonctions $f * p_n$ sont bien définies dans $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elles satisfont: $\|f * p_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(ii) Ce théorème de convergence s'étend également à l'espace des fonctions continues de limite nulle en $\pm\infty$: si $(p_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de limite nulle en $\pm\infty$, alors, les fonctions $f * p_n$ sont bien définies, continues et de limite nulle, et elles satisfont:

$$\|f * p_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f * p_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

III Formule de Fourier inverse et théorème de Plancherel

1. Formule de Fourier inverse et applications

Comme le théorème de Dirichlet dans le cas des séries de Fourier, la formule de Fourier inverse permet de reconstruire une fonction f de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ à partir de sa transformée de Fourier $\hat{f}$. La preuve repose sur la formule d'échange suivante.

Formule d'échange: Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)^2$. Les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ satisfont:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Dém: (i) Comme les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, elles sont bornées sur $\mathbb{R}$, de sorte qu'il existe un nombre $K \geq 0$ tel que: p.p. $t, x \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(t)| \leq K |f(x)|$, et $|\hat{g}(t) g(x)| \leq K |g(x)|$; comme f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$, les fonctions $f \hat{g}$ et $\hat{f} g$ sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$, et les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx$ sont bien définies.

(ii) Soit alors p.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $R(x, y) = f(x) g(y) \frac{e^{-iyx}}{\sqrt{2\pi}}$; la fonction R est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, et elle satisfait: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |R(x, y)| dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |g(y)| dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty$, d'où par le théorème de Fubini: $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-ixy} dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-iyx} dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \hat{\hat{f}}(y) dy.$

Ex: Pour $x > 0$, posons: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_x(x) = e^{-x|x|}$, et rappelons que: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}$. Par la formule d'échange, nous avons alors: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$, $\frac{1}{\sqrt{2x}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x|x|}{4}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-x|x|} dx.$

Nous utilisons l'exemple précédent pour démontrer la formule de Fourier inverse.

Formule de Fourier inverse: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$ telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$.

Alors: p.p. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$

Dém: (i) Soit $n \geq 0$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons: $\forall y \in \mathbb{R}$, $g_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iny} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}}$; la fonction g_n est dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$, et elle satisfait: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iny} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} e^{-i\xi y} dy = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(n+1)(\xi-x)^2}$, d'où par la formule d'échange: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \sigma)$, $\frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(n+1)(\xi-x)^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{-iny} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} dy.$

(ii) Rappelons que les fonctions $(p_n)_{n \geq 0}$ définies par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} e^{-(n+1)x^2}$ forment une approximation de l'identité, de sorte que: $\|p_n * f - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; par la corollaire du théorème de Riesz-Fischer, il existe une extraction $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que: p.p. $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\sqrt{\nu(t)+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(\nu(t)+1)(\xi-t)^2} d\xi = p_{\nu(t)} * f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$

(iii) Comme $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(y) e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(y) e^{ixy}$, et
 $\forall n \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}, \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(y) e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} \right| \leq \frac{|\widehat{f}(y)|}{\sqrt{2\pi}}$, avec $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$,
 par le théorème de convergence dominée, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{4(n+1)}} dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy$, d'où à la limite $n \rightarrow +\infty$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy$.

Ex: Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction f_α définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, et rappo-
 nous que la transformée de Fourier $\widehat{f}_\alpha$ est égale à: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$; com-
 me les fonctions f_α et $\widehat{f}_\alpha$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par la formule d'inversion de Four-
 ier, p.p.t. $x \in \mathbb{R}, e^{-\alpha|x|} = f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\alpha(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi$.

Rem: Lorsque la fonction $\widehat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, sa transformée de Fourier $\widehat{\widehat{f}}$ est bien
 définie par la formule: $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\widehat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$; cette fonction
 est de plus continue sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$. Nous observons que la formule
 de Fourier inverse s'écrit alors sous la forme: p.p.t. $x \in \mathbb{R}, f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$, ce qui conduit
 au corollaire suivant.

Cor: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. La fonction f possède un repré-
 sentant continu sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, qui satisfait:
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$.

Dém: Résulte de la formule de Fourier inverse, et de la remarque précédente.

Ex: Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction f_α définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, et rappo-
 nous que: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$; comme les fonctions f_α et $\widehat{f}_\alpha$ sont
 continues sur $\mathbb{R}$ et appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par le corollaire précédent: $\forall x \in \mathbb{R},$
 $e^{-\alpha|x|} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi$.

Rem: Il existe des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telles que la transformation de Fourier
 $\widehat{f}$ n'appartienne pas à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Dans ce cas, la formule d'inversion de
 Fourier ne s'applique pas.

Ex: Soit p.p.t. $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ si $-1 \leq x \leq 1$, 0 sinon; rappelons que: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
 $\text{sinc}(\xi)$, et vérifions que la fonction $\widehat{f}$ n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; dans ce
 cas contraire, le corollaire précédent assure que la fonction f admet un repré-
 sentant continu, ce qui est absurde; en particulier, la fonction $\widehat{f}$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R},$
 $\mathbb{R})$, et la formule de Fourier inverse ne s'applique pas à la fonction f .

Lorsque la formule de Fourier inverse s'applique, la fonction considérée est égale (à une symétrie près) à la transformée de Fourier de sa transformée de Fourier. Lors que la transformée de Fourier est explicite, la formule de Fourier inverse permet donc de calculer sa transformée de Fourier : il s'agit donc d'un outil très utile pour calculer la valeur de certaines transformées de Fourier.

Ex: (i) Soit $\alpha > 0$; considérons la fonction h_α définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$; la fonction h_α est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et elle satisfait: $\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}_\alpha(x)$, où: $\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$; par la formule de Fourier inverse, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{h}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(-\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$.

(ii) Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; par le corollaire précédent, la fonction g admet un représentant continu, de limite nulle en $\pm\infty$, ce qui assure l'existence d'un nombre $K \geq 0$ tel que: p.p.t $x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq K \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq K|f(x)|$; comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la fonction $f g$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) e^{-i\xi x} dx$; comme $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\eta) e^{i\eta x} d\eta$ par la formule de Fourier inverse, $\hat{f g}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\eta) e^{i\eta x} d\eta \right) e^{-i\xi x} dx$; sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\hat{g}(\eta) e^{i\eta x} e^{-i\xi x}| d\eta dx = \|f\|_1 \|\hat{g}\|_1 < +\infty$, par le théorème de Fubini, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f g}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\eta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\xi-\eta)x} dx \right) d\eta$, d'où la formule: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi-\eta) \hat{g}(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}(\xi)$.

La formule de Fourier inverse permet aussi de démontrer l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Prop: Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Si les transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont égales, alors: $f = g$.

Dém: Soit $h = f - g$; la fonction h est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, avec: $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = 0$; comme $0 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par la formule de Fourier inverse, p.p.t $x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 e^{i\eta x} d\eta = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ p.p.} \Rightarrow f = g$.

Ex: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que la transformée de Fourier est nulle; la fonction f est alors nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Dém: (i) Soit $E = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ s.t. } \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})\}$. Par la formule de Fourier inverse, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire de E sur E , dont la bijection réciproque est donnée par: $\forall f \in E, \forall p \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \hat{f}(-x)$. Cet énoncé est néanmoins restreint au sens où, par la nullité précédente, toute fonction $f \in E$ admet un représentant continu de limite nulle en $\pm\infty$, de sorte que E est un sous-espace strict de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Le théorème de Plancherel dont la preuve suit permettra d'introduire un cadre fonctionnel, celui de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, dans lequel la transformation de Fourier est bien un isomorphisme linéaire.

(ii) Il est possible de montrer que la transformation de Fourier n'est pas contra pas surjective, donc pas bijective, de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans l'espace des fonctions continues de limite nulle en $\pm\infty$.

2. Théorème de Plancherel

Avant d'étudier la transformation de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, rappelons que cet espace est un espace de Hilbert pour le produit scalaire réel ou complexe:

$$\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle_{\mathbb{C}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

et que la norme euclidienne ou hermitienne associée est donnée par l'expression:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_{\mathbb{C}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

À l'aide de la formule de Fourier inverse, nous pouvons évaluer le produit scalaire $\langle f, g \rangle_{\mathbb{C}}$ de deux fonctions $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ telles que leurs transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, en fonction du produit scalaire $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathbb{C}}$.

Prop: Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ telles que $(\hat{f}, \hat{g}) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$. Les fonctions $f, g, \hat{f}$ et $\hat{g}$ appartenant à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elles satisfont:

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

En particulier:

$$\|f\|_{\mathbb{C}} = \|\hat{f}\|_{\mathbb{C}}.$$

Dém: (i) Comme f et $\hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la formule de Fourier inverse assure

ces fonctions sont continues de limite nulle en $\pm\infty$, donc sont bornées; en particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(x)|^2 dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(x)| dx \Rightarrow (f, \widehat{f}) \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})^2$, et de même, $(g, \widehat{g}) \in L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})^2$.

(ii) Par la formule de Plancher inverse, $\langle f, g \rangle_L = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(s) e^{-isx} ds \right) dx$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \overline{g(s)} e^{-isx}| ds dx = \|f\|_L \|\widehat{g}\|_L < +\infty$, par le théorème de Fubini, $\langle f, g \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(s) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx \right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s) \overline{\widehat{g}(s)} ds = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_L$.

(iii) Pour $g = f$, $\|f\|_L^2 = \langle f, f \rangle_L = \langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle_L = \|\widehat{f}\|_L^2 \Rightarrow \|f\|_L = \|\widehat{f}\|_L$.

Dém: Le résultat demeure vrai lorsque les fonctions f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$ et à $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$, sans hypothèse supplémentaire sur les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$.

Cor: Soit $(f, g) \in [L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})]^2$. Les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$, et elles satisfont:

$$\langle f, g \rangle_L = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_L.$$

En particulier:

$$\|f\|_L = \|\widehat{f}\|_L$$

Dém: (i) Considérons l'approximation de l'identité $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par: $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} e^{-(n+1)x^2}$, et rappelons que: $\forall n \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$, $\widehat{p}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{4(n+1)}}$. Comme f est dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$ et dans $L^1(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$, et comme les fonctions $(p_n)_{n \geq 0}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$, les fonctions $f * p_n$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$ et dans $L^1(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$, et elles satisfont:

$$\|f * p_n - f\|_L \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ d'après la continuité de la norme } \|\cdot\|_L, \|f * p_n\|_L \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_L.$$

(ii) De plus: $\forall s \in \mathbb{R}$, $f * p_n(s) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \widehat{f}(s) \widehat{p}_n(s) = \widehat{f}(s) e^{-\frac{s^2}{4(n+1)}}$; comme $\widehat{f}$ est continue de limite nulle en $\pm\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, de sorte que les fonctions $f * p_n$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$ et dans $L^1(\mathbb{R}, \text{Mes } \mathbb{C})$; en particulier, par le résultat précédent: $\|f * p_n\|_L^2 = \|\widehat{f} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \widehat{p}_n\|_L^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(s)|^2 e^{-\frac{s^2}{2(n+1)}} ds$.

(iii) Par le lemme de Lebesgue, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(s)|^2 e^{-\frac{s^2}{2(n+1)}} ds \leq$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p}(s)|^2 e^{-\frac{s^2}{2(n+1)}} ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|p * p_n\|_2^2 = \|p\|_2^2 < +\infty$, ce qui assure que la transformée de Fourier $\hat{p}$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iv) Comme $\forall s \in \mathbb{R}$, $|\hat{p}(s)|^2 e^{-\frac{s^2}{2(n+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\hat{p}(s)|^2$, et $\forall n \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $|\frac{s^2}{2(n+1)}| \leq |\hat{p}(s)|^2$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p}(s)|^2 ds < +\infty$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p}(s)|^2 e^{-\frac{s^2}{2(n+1)}} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{p}(s)|^2 ds = \|\hat{p}\|_2^2$, d'où à la limite $n \rightarrow +\infty$, $\|p\|_2 = \|\hat{p}\|_2$.

(v) Soient $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et de même, $\|p \pm (i)g\|_2^2 = \|\hat{p} \pm (i)\hat{g}\|_2^2$, d'où par la formule de polarisation, $\langle p, g \rangle_2 = \langle \hat{p}, \hat{g} \rangle_2$.

Ex. Soit $\alpha > 0$. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$; les fonctions g_α sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elles satisfont : $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{s^2}{4\alpha}}$; en particulier, nous vérifions que : $\|g_\alpha\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$, et $\|\hat{g}_\alpha\|_2^2 = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2\alpha}} ds \stackrel{y = \frac{s}{\sqrt{2\alpha}}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$, d'où l'égalité : $\|g_\alpha\|_2 = \|\hat{g}_\alpha\|_2$.

Comme les fonctions continues à support compact appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, le sous-espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et nous pouvons combiner cette propriété au corollaire précédent pour étendre la transformation de Fourier à tout l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Théorème de Plancherel : Il existe une unique application linéaire continue $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}.$$

L'application $\mathcal{F}$ est appelée transformation de Fourier (sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$), et :

(i) Elle réalise une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, c'est-à-dire que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2.$$

(ii) Elle réalise un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, d'inverse donné par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad p, t, x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x).$$

Dém. (i) Construction de l'application $\mathcal{F}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Comme les fonctions con-

fonctions à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, et appartenant à $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))} \rightarrow 0$; par la corollaire précédent, $\forall n, m \geq 0$, $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \Rightarrow (\hat{f}_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \Rightarrow \exists g_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ t.q. $\|\hat{f}_n - g_\infty\|_2 \rightarrow 0$; si $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$ est une autre suite de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telle que $\|\tilde{f}_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))} \rightarrow 0$, alors la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \geq 0$, $g_n = f_n$ et $g_{n+1} = \tilde{f}_n$, vérifie encore $\|g_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists g_\infty \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ t.q. $\|\hat{g}_n - g\|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \|\hat{f}_n - g_\infty\|_2 \rightarrow 0$ et $\|\hat{\tilde{f}}_n - g_\infty\|_2 \rightarrow 0$; par unicité de la limite, $f_\infty = g_\infty \Rightarrow \|\hat{f}_n - f_\infty\|_2 \rightarrow 0$, ce qui assure que la fonction f_∞ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$, mais que de sa limite f ; posons : $f_\infty = \mathcal{F}(f)$; la fonction $\mathcal{F}$ est alors bien définie de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, et par continuité de la norme $\|\cdot\|_2$, elle satisfait : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})), \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$; cette égalité est en effet vraie sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, et donc par passage à la limite sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$; par passage à la limite, l'application $\mathcal{F}$ demeure aussi linéaire sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, d'où : $\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})), \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)\|_2 = \|\mathcal{F}(f-g)\|_2 = \|f-g\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $\|f-g\|_2 \rightarrow 0$; en conclusion, l'application $\mathcal{F}$ est aussi continue sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$; comme $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})), \mathcal{F}(f) = \hat{f}$, nous en déduisons l'existence de l'application $\mathcal{F}$.

(ii) Unicité de l'application $\mathcal{F}$. Supposons que $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfasse les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$, et considérons une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, et une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telle que : $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$; comme $\forall n \geq 0$, $\mathcal{F}(f_n) = \hat{f}_n = \tilde{\mathcal{F}}(f_n)$, par continuité de $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$, $\mathcal{F}(f) = \tilde{\mathcal{F}}(f)$, ce qui assure l'unicité de l'application $\mathcal{F}$.

(iii) Propriétés de l'application $\mathcal{F}$. Nous avons déjà établi que $\mathcal{F}$ est linéaire et isométrique; en particulier, l'application $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C})), \text{ p.p.t. } x \in \mathbb{R}, \tilde{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ est bien définie, linéaire et isométrique, donc continue sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$; considérons alors l'application

tion de l'identité $(p_n)_{n \geq 0}$ définie par: $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} e^{-(n+1)x^2}$, étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, les fonctions $f * p_n$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et comme dans la preuve du corollaire précédent, leurs transformées de Fourier sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; par la formule de Fourier inverse, elles satisfont: $\forall n \geq 0, \widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f * p_n)) = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{F}}(f * p_n)) = f * p_n$; par continuité des applications $\mathcal{F}$ et $\widehat{\mathcal{F}}$, et sachant que $\|f * p_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, à la limite $n \rightarrow +\infty$, $\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{F}}(f)) = f$; comme $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par continuité des applications $\mathcal{F}$ et $\widehat{\mathcal{F}}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{F}}(f)) = f \Rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, d'inverse donné par: $\mathcal{F}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}}$.

Rem: Lorsque la fonction f appartenant à l'intersection $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la valeur de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ (au sens de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$) est donnée par la formule:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Cette formule n'a en général plus de sens lorsque la fonction f est seulement dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ (sans être dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$). Néanmoins il est possible de calculer la valeur de $\mathcal{F}(f)$ grâce à l'énoncé suivant.

Cor: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Posons:

$$\forall n \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Les fonctions $\widehat{f}_n$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, et elles satisfont:

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{\mathcal{F}}(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \widehat{f}_\infty(\xi),$$

alors:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}_\infty(\xi).$$

Dém: (i) Soit $\forall n \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, p_n(x) = f(x) \cdot \chi_{[-n, n]}$, 0 sinon; comme

$\forall n \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x)| dx = \int_{-n}^n |f(x)| dx \leq \sqrt{2n} \|f\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les fonctions p_n appartiennent à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et les

fonctions $\hat{f}_n$ sont donc bien définies, continues et de limite nulle en $+\infty$.

(ii) Comme $\|f_n - f\|_2^2 = \int_{|x| \geq n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par continuité de l'application $\mathcal{F}$, $\|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; sachant que les fonctions f_n sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\forall n > 0$, $\mathcal{F}(f_n) = \hat{f}_n \Rightarrow \|f_n - \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(iii) En particulier, il existe une extraction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\hat{f}_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f)$ presque partout, d'où l'égalité p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}_{\varphi(n)}(\xi)$, lorsque $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_{\infty}$ presque partout.

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(x)$; la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\forall |x| \geq 1$, $|f(x)|^2 \leq \frac{2}{\pi x^2}$; comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, la fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; de plus, $\forall n > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-n}^0 f(x) e^{-i\xi x} dx + \int_0^n f(x) e^{-i\xi x} dx \right)$; comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^n f(x) (e^{-i\xi x} + e^{i\xi x}) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x) \cos(\xi x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(\eta)}{\eta} \cos(\xi x) dx$; $\frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{\sin(\eta)}{\eta} \cos(\xi x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^n \left(\sin((\xi+1)x) + \sin((\xi-1)x) \right) \frac{dx}{x}$; rappelons alors que $\forall \lambda > 0$, $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(\lambda x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda n} \sin(y) \frac{dy}{y} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}$, tandis que $\forall \lambda \leq 0$, $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(\lambda x) \frac{dx}{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{\pi} \int_0^n \sin(0x) \frac{dx}{x} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{si} -1 < \xi < 1, \frac{1}{2} \operatorname{si} \xi = \pm 1$, et 0 sinon; par le corollaire précédent, p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{si} -1 < \xi < 1, 0 \operatorname{si} |\xi| > 1, \frac{1}{2} \operatorname{si} \xi = \pm 1$; comme $\mathcal{F}(f)$ n'est pas continue en ± 1 , nous savons aussi que f n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(x)$; afin de déterminer la transformée de Fourier de la fonction f , nous pourrions aussi utiliser le fait que la fonction g définie par: p.p.t $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{si} -1 < x < 1$, et 0 si $|x| \geq 1$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et satisfait: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = f(\xi)$; en particulier, $\mathcal{F}(g) = \hat{g} = f$, d'où par bijectivité de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}(f) = g$; comme $\forall h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^{-1}(h)(\xi) = \mathcal{F}(h)(-\xi)$, p.p.t $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = g(-\xi) = g(\xi)$.

Nous concluons par le fait que les principales propriétés de la transformation

de Plancher s'étendent, sans ou avec peu de modifications, de l'intersection $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) La fonction $\bar{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et elle satisfait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\bar{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$$

(ii) Posons: $\forall t \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$. La fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et elle satisfait:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi).$$

(iii) En particulier, si f est paire, respectivement impaire, alors $\mathcal{F}(f)$ est paire, respectivement impaire; de plus, si f est paire et réelle, alors $\mathcal{F}(f)$ est paire et réelle.

Dém: Les formules de (i) et (ii) sont vérifiées lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et demeurent vraies dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ par un argument de densité.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(x)$. La fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et comme elle est paire et réelle, sa transformée de Fourier est également paire et réelle, ce que nous pouvons vérifier via la formule: $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$, 0 si $|\xi| > 1$.

Prop: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) Posons: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a f(x) = f(x-a)$.

Les fonctions $\varphi_a f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\varphi_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi).$$

(ii) Posons: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \Phi_a f(x) = e^{iax} f(x)$.

Les fonctions $\Phi_a f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\Phi_a f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi-a)$$

(iii) Posons: $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \Lambda_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Les fonctions $\Lambda_\lambda f$ sont dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont:

$$\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\Lambda_\lambda f)(\xi) = \lambda \mathcal{F}(f)(\lambda\xi).$$

Dém: (i) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})} \rightarrow 0$.

Comme $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-itf}) = \widehat{e^{-itf}}(s) = e^{-iats} \widehat{f}(s) = e^{-iats} \mathcal{F}(f)(s)$,
 et $\|e^{-itf} - e^{-isf}\|_2 = \|f - f\|_2 \xrightarrow{t \rightarrow s} 0$, par continuité de la transfo-
 mation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-itf}) = e^{-iats} \mathcal{F}(f)(s)$.

(ii) et (iii) des formules découlent de même d'un argument de densité.

Ex: Considérons un segment (a, b) (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, et posons : $p, t, x \in \mathbb{R}$,
 $g(x) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} e^{i \frac{a+b}{2}x} \text{si } (x - \frac{a+b}{2}) \in (a, b)$; la fonction $g_{a,b}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et
 elle satisfait : $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g_{a,b})(s) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\chi_{(a,b)})(s)$, où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\chi_{(a,b)}(x) = 1$ si $x \in (a, b)$, 0 sinon; par les formules précédentes, $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g_{a,b})(s) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{b-a} \mathcal{F}(\chi_{(a,b)})(s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\chi_{(a,b)})(s)$; comme $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\chi_{(a,b)})(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ si $|s| < \frac{b-a}{2}$, 0 si $|s| \geq \frac{b-a}{2}$,
 $p, t, f \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g_{a,b})(s) = 1$ si $a \leq s \leq b$, 0 sinon.

Nous terminons par l'exemple de la convolution.

Chen: Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. La fonction $f * g$ appartient à
 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et elle satisfait :

$$p, t, f \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f * g)(s) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(s) \widehat{g}(s).$$

Dém: Considérons une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ t.q. $\|g_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
 comme $\forall n \geq 0$, $\|f * g_n - f * g\|_2 = \|f * (g_n - g)\|_2 \leq \|f\|_2 \|g_n - g\|_2$, $\|f * g_n - f * g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \|f * g_n - f * g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; sachant que $f * g_n$ est dans
 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\mathcal{F}(f * g_n) = \widehat{f * g_n} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g_n}$; comme $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\widehat{f}$
 est continue sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $\pm\infty$, donc bornée sur $\mathbb{R}$; soit $M \geq 0$ t.q.
 $\forall s \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(s)| \leq M$; $\|\widehat{f} \widehat{g_n} - \widehat{f} \widehat{g}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(s) \widehat{g_n}(s) - \widehat{f}(s) \widehat{g}(s)|^2 ds \leq M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g_n}(s) - \widehat{g}(s)|^2 ds$, d'où par la Plancher de Plancher, $\|\widehat{f} \widehat{g_n} - \widehat{f} \widehat{g}\|_2 \leq M \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}$.

Rem: Les formules de la transformation de Fourier d'une dérivée ou d'un produit s'é-
 tendent de façon similaire à l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, sous des hypothèses adé-
 quates, mais dans un sens, et avec des preuves plus avancées, qui dépassent le
 cadre de ce chapitre.