CY Cergy Paris Université — **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques — **2023-2024**

TD N°3. Transformation de Fourier

Exercice 1.

Calculer les transformées de Fourier des fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } |x| \leq 1, \\ 0, \text{ si } |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, \text{ si } |x| \leq 1, \\ 0, \text{ si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction h.

2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = h\Big(\frac{1-x}{2}\Big), \quad h_2(x) = xh(x), \quad \text{et} \quad h_3(x) = x^2 h(x).$$

Exercice 3.

Pour $a > 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_a(x) = e^{-a|x|}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f_a.

2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En déduire la transformée de Fourier de la fonction g.

3. En déduire la valeur des intégrales

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt, \quad I_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt, \quad \text{et} \quad I_3(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Exercice 4.

Pour $a > 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_a(x) = e^{-ax^2}.$$

1.a. Vérifier que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_a'(x) = -2axg_a(x).$$

b. En déduire que sa transformée de Fourier $\hat{g}_a$ satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \; \hat{g}_a'(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\hat{g}_a(\xi).$$

2. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\, dt.$$

a. Montrer que h est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

b. Vérifier que

$$h(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{et} \quad h(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0.$$

c. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Conclure que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}_a(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}.$$

Exercice 5.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = e^{-\sqrt{2}|x|}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction ϕ.
2. Considérons une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * \phi(x) = e^{-x^2}.$$

a. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f.

b. En déduire la valeur de la fonction f.

Exercice 6.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2} e^{tx}\, dt = 0.$$

1. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x^2}.$$

Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = 0.$$

2. En déduire que

$$\text{p.p.t. } \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = 0.$$

3. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

Exercice 7.

Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Considérons l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f''(x) + f(x) = g(x).$$

1.a. Supposons qu'il existe une solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de cette équation telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Vérifier que $f'' \in L^1(\mathbb{R})$.

b. En déduire que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi^2 + 1}.$$

c. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-|x-y|}\, dy.$$

2. Vérifier qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de cette équation différentielle telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\, e^{-i\xi t}\, dt.$$

2. En déduire que la fonction f est impaire si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x^2}\, dx = 0.$$

Exercice 9. *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2)\big(\psi(x)^2 + \psi'(x)^2\big)\, dx < +\infty.$$

1. Vérifier que ψ et ψ' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, avec

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\psi'}(\xi) = i\xi\hat{\psi}(\xi).$$

2.a. Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2\, dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\psi'(x)\, dx.$$

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2\, dx \leq 2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\psi(x)^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

c. Conclure que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 \, dx \leq 2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi(x)^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 10. *Système de Hermite.*

1.a. Soit $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dx}^n}\Big(e^{-x^2}\Big) = (-1)^n \, H_n(x) \, e^{-x^2}.$$

b. Déterminer le degré du polynôme H_n et calculer son coefficient dominant.

2. Pour $n \geq 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} \, H_n(x) \, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a. Vérifier que les fonctions ϕ_n appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes complexes $(P_n^\xi)_{n \geq 0}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, P_n^\xi(x) \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-i\xi x},$$

et

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \, |P_n^\xi(x)| \leq e^{|\xi x|}.$$

4. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \geq 0, \langle \phi_n, f \rangle_{L^2} = 0.$$

a. Soit

$$\text{p.p.t.} x \in \mathbb{R}, \, g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} f(x).$$

Vérifier que la fonction g appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

b. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \, \hat{g}(\xi) = 0.$$

c. En déduire que la fonction f est identiquement nulle.

d. Conclure que $(\phi_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 11. *Formule sommatoire de Poisson.*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un nombre $C > 0$ pour lequel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, |f(x)| + |f'(x)| \leq \frac{C}{1 + x^2}.$$

1.a. Vérifier que les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + 2n\pi)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi).$$

En déduire que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Déterminer les coefficients de Fourier complexes $(c_n(F))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction F.

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

Exercice 12. *Théorème d'échantillonnage de Shannon.*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait

$$\forall |\xi| \geq \pi,\ \hat{f}(\xi) = 0.$$

1.a. Vérifier que la fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}''(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

c. En déduire qu'il existe un nombre $C \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

2.a. Vérifier qu'il existe un nombre $C' \geq 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ |\hat{f}(\xi)| + |\hat{f}'(\xi)| \leq \frac{C'}{1+\xi^2}.$$

b. En déduire que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)e^{in\xi}.$$

c. Vérifier que

$$\forall |\xi| \leq \pi,\ \forall n \in \mathbb{Z}^*, |\xi + 2n\pi| \geq \pi.$$

d. Conclure que

$$\forall \xi \in [-\pi, \pi],\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-in\xi}.$$

3.a. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{i\xi(x-n)}\, d\xi.$$

b. Vérifier que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(x-n)}\, d\xi = \operatorname{sinc}\big(\pi(x-n)\big) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)},\ \text{si } x \neq n, \\ 1,\ \text{si } x = n. \end{cases}$$

c. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\, e^{i\xi(x-n)}$ converge normalement pour $\xi \in [-\pi, \pi]$.

d. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \operatorname{sinc}\big(\pi(x-n)\big).$$