CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

TD N°2. Espaces de Hilbert

Exercice 1.

Considérons une norme $\| \ \|$ sur un espace vectoriel réel E et supposons qu'elle satisfait l'identité du parallélogramme

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Posons

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big).$$

1. Vérifier que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle.$$

2.a. Vérifier que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle, \quad \text{et} \quad \langle x, 2y\rangle = 2\langle x, y\rangle.$$

b. En déduire que

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

3.a. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle.$$

b. Conclure que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E dont la norme associée est la norme $\| \ \|$.

Exercice 2.

Soit H un espace de Hilbert. Considérons deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ de H telles que

$$\forall n \geq 0,\ \|x_n\|_H \leq 1, \quad \text{et} \quad \|y_n\|_H \leq 1.$$

1. Supposons que

$$\langle x_n, y_n\rangle_H \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Montrer que

$$x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

2. Supposons que

$$\|x_n + y_n\|_H \underset{n\to+\infty}{\to} 2.$$

Montrer que

$$x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Exercice 3.

Soit

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{N}) = \Big\{ a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 |a_n|^2 < +\infty \Big\}.$$

1.a. Montrer que $\mathcal{H}^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace dense de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. En déduire que le sous-espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{N})$ n'est pas un sous-ensemble complet de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2. Posons

$$\forall (a, b) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{N})^2,\ \langle a, b\rangle_{\mathcal{H}^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + n^2) a_n b_n.$$

a. Vérifier que $\langle\, ,\, \rangle_{\mathcal{H}^1}$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{N})$.

b. Montrer que l'espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{N})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Exercice 4.

Considérons l'espace H des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-x}\, dx < +\infty,$$

et posons

$$\forall (f, g) \in H^2,\ \langle f, g\rangle_H = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) e^{-x}\, dx.$$

1. Vérifier que l'application $\langle\, ,\, \rangle_H$ définit un produit scalaire sur l'espace H.

2.a. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\,\|_H$ associée au produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_H$. Posons

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = f_n(x) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

b. En déduire que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_H$.

Exercice 5.

Déterminer la valeur minimale de l'intégrale

$$\mathcal{I}(a, b, c) = \int_{-1}^{1} \big(x^3 - ax^2 - bx - c\big)^2\, dx.$$

pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

Soit H un espace de Hilbert. Considérons la boule fermée $B_f(a, R)$ de centre $a \in H$ et de rayon $R > 0$.

1. Soit $x \in H$. Déterminer la distance de x à la boule fermée $B_f(a, R)$.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_N)$ une famille orthonormée de H et F le sous-espace vectoriel de H engendré par cette famille. Montrer que la distance de la boule $B_f(a, R)$ au sous-espace F est égale à

$$d\big(B_f(a, R), F\big) = \max\Big\{ \Big(\|a\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle a, e_i\rangle_H^2 \Big)^{\frac{1}{2}} - R, 0 \Big\}.$$

Exercice 7.

Soit

$$F = \{a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ t.q. } \forall n \geq 0, a_{2n} = a_{2n+1}\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2.a. Déterminer le sous-espace orthogonal $F^\perp$ de F.

b. En déduire la décomposition d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ suivant le sous-espace F et son orthogonal $F^\perp$.

Exercice 8.

Rappelons que l'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, et considérons le sous-espace

$$V = \Big\{f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0\Big\}.$$

1. Soit $\phi \in C_c^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 1.$$

Pour $n \geq 1$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \phi_n(x) = \frac{1}{n}\phi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

a. Montrer que

$$\phi_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

b. Pour $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, posons

$$\forall n \geq 1,\, h_n = g - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx\Big)\phi_n.$$

Montrer que la fonction h_n appartient au sous-espace V.

c. En déduire que

$$V^\perp \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})^\perp.$$

2. Conclure que le sous-espace V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 9.

Soit

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \Big\{a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \|a\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty\Big\}.$$

Considérons un espace de Hilbert H séparable muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$.

1. Pour $x \in H$, notons

$$\forall n \geq 0,\, a_n = \langle x, e_n\rangle_H.$$

Montrer que la suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, et qu'elle vérifie

$$\|x\|_H = \|a\|_{\ell^2}.$$

2. Soit $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n e_n$ est convergente dans H, et qu'elle satisfait

$$\forall n \geq 0,\ a_n = \Big\langle \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e_k, e_n \Big\rangle_H.$$

3. Soit

$$\forall x \in H,\ \Phi(x) = \big(\langle x, e_n\rangle_H\big)_{n\geq 0}.$$

Conclure que Φ est un isomorphisme linéaire de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

4. En déduire que $(e_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une base algébrique de H.

Exercice 10. *Théorème de Riesz.*

Soit H un espace de Hilbert séparable muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$. Supposons qu'il existe une sous-suite $(e_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers un vecteur e_∞ de H.

1. Montrer que

$$\|e_\infty\|_H = 1.$$

2. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ \langle e_{\phi(n)}, e_{\phi(n+1)}\rangle_H = 0.$$

3. Conclure que la boule unité fermée de H n'est pas compacte.

Exercice 11.

Considérons l'espace $L^2_{\text{pér}}$ des fonctions réelles mesurables, 2π-périodiques et de carré intégrable sur $]-\pi,\pi[$. Rappelons qu'il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in \big(L^2_{\text{pér}}\big)^2,\ \langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

1. Soit

$$V = \Big\{ f \in L^2_{\text{pér}} \text{ t.q. p.p.t. } x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \Big\},$$

le sous-ensemble des fonctions paires de $L^2_{\text{pér}}$.

a. Montrer que V est un sous-espace fermé de $L^2_{\text{pér}}$.

b. En déduire que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$.

2. Pour $n \geq 0$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{2}\cos(2^n x).$$

a. Vérifier que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale.

b. Cette famille est-elle une base hilbertienne de V ?

3. Rappelons que le sous-espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $L^2_{\text{pér}}(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 0$, posons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_n(x) = \sqrt{2}\cos(nx).$$

a. Vérifier que la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale.

b. Montrer que le sous-espace $\mathcal{P} \cap V$ est dense dans V.

c. En déduire que la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de V.

Exercice 12. *Polynômes de Laguerre.*

Considérons l'espace H des fonctions réelles mesurables sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-x}\,dx < +\infty.$$

Rappelons qu'il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in H^2,\ \langle f,g\rangle_H = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,dx.$$

1.a. Soit $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel L_n tel que

$$\forall x \geq 0,\ \frac{d^n}{dx^n}\big(x^n e^{-x}\big) = n! L_n(x)e^{-x}.$$

b. Déterminer le degré et le coefficient de plus haut degré du polynôme L_n.

c. En déduire que la famille $(L_n)_{n\geq 0}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$.

2.a. Vérifier que l'ensemble des fonctions polynômes est un sous-espace de H.

b. Montrer que

$$\forall n > m \geq 0,\ \langle L_m, L_n\rangle_H = 0.$$

c. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!\,.$$

d. En déduire que la famille $(L_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale dans H.

3. Nous admettons que le sous-espace des fonctions polynômes est dense dans H. En déduire que la famille $(L_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.