TD N°1. Séries de Fourier

Exercice 1.

Soit
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la limite de la somme $S(x)$ de cette série lorsque x tend vers 0.

3. Prouver que
$$\int_0^\pi S(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 2. *Critère d'Abel.*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Considérons une suite complexe $(v_n)_{n\geq 0}$ et posons
$$\forall n \geq 0,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

a. Vérifier que
$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k.$$

b. Supposons que la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ est convergente.

2. Soit
$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ U_n(x) = u_n\, e^{inx}$$

a. Montrer que la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

b. Cette série de fonctions est-elle convergente pour $x = 0$?

3.a. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \delta < \pi$. Vérifier que la convergence de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ est uniforme sur le segment $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$.

b. En déduire que la somme U est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3.
Soit g la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi^2}{4} \text{ si } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction g.
2. En déduire la somme des séries

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 4.
Soit h la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ h(x) = e^{-x}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction h.
2. En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Exercice 5.
1. Déterminer une suite de nombres réels $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall x \in [0, \pi],\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

2. En déduire la somme de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 6.
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Considérons la fonction 2π-périodique f_α donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ f_\alpha(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f_α.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f_α.
3. En déduire la somme des séries

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, \quad \text{et} \quad T_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 7.

Pour $0 < \theta < 1$, considérons la fonction f_θ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\theta(x) = \frac{1}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\theta(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

où

$$(1+\theta^2)a_0 - \theta a_1 = 1,\ \theta a_2 - (1+\theta^2)a_1 + 2\theta a_0 = 0,\ \text{ et } \forall n \geq 2,\ \theta a_{n+1} - (1+\theta^2)a_n + \theta a_{n-1} = 0.$$

2.a. Calculer les nombres a_0, a_1 et a_2.

b. Montrer qu'il existe des nombres réels α et β tels que

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \alpha\theta^n + \frac{\beta}{\theta^n}.$$

c. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1-\theta^2}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n \cos(nx).$$

Exercice 8.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $|\alpha| \neq 1$, et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}}\, dx.$$

Exercice 9.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2 - \cos(x)}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1 + \sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{e^{ix} - 2 + \sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{e^{ix} - 2 - \sqrt{3}}\right).$$

2.a. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n \cos(nx).$$

b. Quel est le développement en série de Fourier de la fonction f ?

Exercice 10.

Soit f la fonction impaire, 2π-périodique, donnée par

$$\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = \begin{cases} x, \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \ \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction f.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer le développement en série de Fourier de la primitive F de f qui est nulle en 0.

4. En déduire la valeur de la série

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 11.

Soit

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

1.a. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que sa fonction somme S est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction somme S.

2. Soit

$$\forall m \geq 0,\ h_m = \frac{\pi}{2^{m+1}}.$$

a. Vérifier que

$$\forall m \geq 0,\ S(h_m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(2^n h_m)}{2^n}.$$

b. En déduire que

$$\forall m \geq 0,\ \frac{S(h_m)}{h_m} \geq \frac{2m}{\pi}.$$

c. Conclure que la fonction somme S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Vérifier que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha k\ell} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x}\, dx.$$

2. Soit f une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Exercice 13.

Soit g la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ g(x) = x^2.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction g.

2. Calculer la somme de la série de Fourier de g.

3. En déduire la valeur des séries

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 14.

Soit $0 < \alpha < \pi$. Considérons la fonction 2π-périodique f_α donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction f_α.

2. Calculer la somme de la série de Fourier de f_α.

3. En déduire la valeur des séries :

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n}, \quad T_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}, \quad \text{et} \quad U_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 15. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger.*

Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Considérons sa moyenne

$$m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

1. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(t) - m(f)\right|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt.$$

2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe des nombres réels a, b et c telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = a + b\cos(t) + c\sin(t).$$

Exercice 16. *Inégalité de Sobolev.*

Soit f une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Montrer que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left|f(x)\right|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(y)|^2 \, dy.$$

Exercice 17.

Soit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\cos(x)|.$$

Considérons l'équation différentielle
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -y''(x) + 4y(x) = f(x). \tag{EqDiff}$$

1. Développer la fonction f sous la forme d'une série trigonométrique.

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une solution de l'équation différentielle
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -y''(x) + 4y(x) = \cos(nx).$$

b. En déduire une solution π-périodique de l'équation (EqDiff).

3. Résoudre l'équation (EqDiff).

Exercice 18. *Phénomène de Gibbs.*

Soit φ la fonction 2π-périodique donnée par
$$\forall x \in]-\pi,\pi],\ \varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}, \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \pi, \\ 1, \text{ si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de la fonction φ.

2. Soit $n \geq 1$. Considérons la somme partielle de la série de Fourier de la fonction φ
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_{2n-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{2n-1} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big).$$

a. Vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt.$$

b. En déduire les racines de la dérivée S'_{2n-1} sur le segment $[0,\pi]$.

c. Conclure que
$$\max_{x\in[0,\pi]} S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt.$$

3.a. Vérifier que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

b. Nous admettons que
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt > \frac{\pi}{2}.$$

Conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[0,\pi]} S_{2n-1}(x) > 1.$$