

TD N°1. Séries de Fourier

Exercice 1.

Soit

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ sur \mathbb{R} .
2. Calculer la limite de la somme $S(x)$ de cette série lorsque x tend vers 0.
3. Prouver que

$$\int_0^\pi S(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4. Montrer que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 2. Critère d'Abel.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Considérons une suite complexe $(v_n)_{n \geq 0}$ et posons

$$\forall n \geq 0, V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

- a. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k.$$

- b. Supposons que la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ est bornée. Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ est convergente.

2. Soit

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, U_n(x) = u_n e^{inx}$$

- a. Montrer que la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

- b. Cette série de fonctions est-elle convergente pour $x = 0$?

3.a. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \delta < \pi$. Vérifier que la convergence de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ est uniforme sur le segment $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$.

- b. En déduire que la somme U est continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

Soit g la fonction 2π -périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction g .
2. En déduire la somme des séries

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 4.

Soit h la fonction 2π -périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], h(x) = e^{-x}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction h .
2. En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Exercice 5.

1. Déterminer une suite de nombres réels $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall x \in [0, \pi], \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

2. En déduire la somme de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Considérons la fonction 2π -périodique f_α donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f_\alpha(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f_α .
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f_α .
3. En déduire la somme des séries

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, \quad \text{et} \quad T_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 7.

Pour $0 < \theta < 1$, considérons la fonction f_θ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\theta(x) = \frac{1}{1 - 2\theta \cos(x) + \theta^2}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\theta(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

où

$$(1 + \theta^2)a_0 - \theta a_1 = 1, \theta a_2 - (1 + \theta^2)a_1 + 2\theta a_0 = 0, \text{ et } \forall n \geq 2, \theta a_{n+1} - (1 + \theta^2)a_n + \theta a_{n-1} = 0.$$

2.a. Calculer les nombres a_0 , a_1 et a_2 .

b. Montrer qu'il existe des nombres réels α et β tels que

$$\forall n \geq 1, a_n = \alpha \theta^n + \frac{\beta}{\theta^n}.$$

c. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1 - \theta^2}{1 - 2\theta \cos(x) + \theta^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n \cos(nx).$$

Exercice 8.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $|\alpha| \neq 1$, et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}} dx.$$

Exercice 9.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2 - \cos(x)}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 + \sqrt{3} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{e^{ix} - 2 + \sqrt{3}} - \frac{2 + \sqrt{3}}{e^{ix} - 2 - \sqrt{3}} \right).$$

2.a. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (2 - \sqrt{3})^n \cos(nx).$$

b. Quel est le développement en série de Fourier de la fonction f ?

Exercice 10.

Soit f la fonction impaire, 2π -périodique, donnée par

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction f .
2. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur \mathbb{R} .
3. Calculer le développement en série de Fourier de la primitive F de f qui est nulle en 0.
4. En déduire la valeur de la série

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 11.

Soit

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

- 1.a. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente sur \mathbb{R} .
 - b. En déduire que sa fonction somme S est bien définie, 2π -périodique et continue sur \mathbb{R} .
 - c. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction somme S .
2. Soit

$$\forall m \geq 0, h_m = \frac{\pi}{2^{m+1}}.$$

- a. Vérifier que

$$\forall m \geq 0, S(h_m) = \sum_{n=1}^m \frac{\sin(2^n h_m)}{2^n}.$$

- b. En déduire que

$$\forall m \geq 0, \frac{S(h_m)}{h_m} \geq \frac{2m}{\pi}.$$

- c. Conclure que la fonction somme S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Vérifier que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\alpha k \ell} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x} dx.$$

2. Soit f une fonction 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Exercice 13.

Soit g la fonction 2π -périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], g(x) = x^2.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction g .
2. Calculer la somme de la série de Fourier de g .
3. En déduire la valeur des séries

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 14.

Soit $0 < \alpha < \pi$. Considérons la fonction 2π -périodique f_α donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels de la fonction f_α .
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f_α .
3. En déduire la valeur des séries :

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n}, \quad T_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}, \quad \text{et} \quad U_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 15. Inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Soit f une fonction 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} , et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Considérons sa moyenne

$$m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

1. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - m(f)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe des nombres réels a, b et c telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a + b \cos(t) + c \sin(t).$$

Exercice 16. Inégalité de Sobolev.

Soit f une fonction 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} telle que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Montrer que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(y)|^2 dy.$$

Exercice 17.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |\cos(x)|.$$

Considérons l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, -y''(x) + 4y(x) = f(x). \quad (\text{EqDiff})$$

1. Développer la fonction f sous la forme d'une série trigonométrique.
- 2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, -y''(x) + 4y(x) = \cos(nx).$$

- b. En déduire une solution π -périodique de l'équation (EqDiff).
3. Résoudre l'équation (EqDiff).

Exercice 18. Phénomène de Gibbs.

Soit φ la fonction 2π -périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi, \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier réels $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ de la fonction φ .
2. Soit $n \geq 1$. Considérons la somme partielle de la série de Fourier de la fonction φ

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_{2n-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{2n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- a. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt.$$

- b. En déduire les racines de la dérivée S'_{2n-1} sur le segment $[0, \pi]$.
- c. Conclure que

$$\max_{x \in [0, \pi]} S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt.$$

- 3.a. Vérifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- b. Nous admettons que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt > \frac{\pi}{2}.$$

Conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0, \pi]} S_{2n-1}(x) > 1.$$