

Chapitre I : Séries de Fourier

Introduction

Soit $T > 0$. L'objectif de ce chapitre est d'introduire en outil mathématique, les séries de Fourier, qui permet de mieux décrire et manipuler les fonctions T -périodiques, soit les fonctions de la variable réelle f , à valeurs réelles ou complexes, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Le principe des séries de Fourier est de décomposer ces fonctions T -périodiques en une somme ou une série de fonctions élémentaires plus faciles à manipuler. Les briques élémentaires des séries de Fourier sont les fonctions sinusoidales T -périodiques de la forme :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \\ \text{et} \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \end{cases}$$

ou de manière équivalente, les fonctions exponentielles complexes T -périodiques :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{i \frac{2\pi n x}{T}}.$$

Ces fonctions présentent le premier avantage d'être régulières, avec des formules explicites très simples pour leurs dérivées successives, mais leur manipulation algébrique est aussi facilitée par des formules explicites pour leur somme et leur produit.

En pratique, la décomposition d'une fonction T -périodique f en série de Fourier se déroule en deux étapes. D'abord l'analyse qui consiste à déterminer des suites de coefficients $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, ou $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, qui permettent de définir une série trigonométrique $a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)$, ou de façon équivalente, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i \frac{2\pi n x}{T}}$, la série de Fourier associée à la fonction f ; puis la synthèse qui cherche à établir via la convergence de la série de Fourier que cette série permet de retrouver, en un sens à préciser, la fonction f .

Dans la suite de ce chapitre, nous expliquerons à partir de l'exemple simple des polynômes trigonométriques comment calculer les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \geq 0}$, $(b_n(f))_{n \geq 1}$ et $(c_n(f))_{n \geq 1}$, et nous déduisons leurs propriétés élémentaires. Nous établirons ensuite plusieurs critères de convergence des séries de Fourier associées, qui reposent sur des conditions de régularité de la fonction T -périodique f considérée.

I Décomposition des fonctions périodiques en série de Fourier

1. Fonctions périodiques

Considérons un nombre réel strictement positif T .

a. Définitions et exemples

Def: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction f est T -périodique si et seulement si:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Dans ce cas, le nombre réel T est une période de la fonction f .

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x)$. La fonction f est π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Les nombres $2\pi, 3\pi, \dots$ sont aussi des périodes de la fonction f .

Rem: (i) Étant donnée une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$G = \{ T \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x) \}$$

est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. La fonction f est périodique lorsque ce groupe n'est pas réduit au singleton $\{0\}$. La classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ assure alors que G est dense dans $\mathbb{R}$, ou il existe un unique nombre $T > 0$ tel que $G = T\mathbb{Z}$. Dans ce second cas, le nombre T est la période de la fonction f . Les autres périodes de cette fonction sont les nombres nT pour $n \geq 1$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x)$. La fonction f a pour période le

nombre π .

(ii) Lorsque une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est T -périodique pour un nombre $T > 0$, continue et non constante, sa période est égale à :

$$T = \min \{ T > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x) \}.$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{3ix}$. La fonction g est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique, multipliée, et sa période est égale à $\frac{2\pi}{3}$.

(iii) Lorsque une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est plus continue, la notion de période n'a plus nécessairement de sens.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}$, 0 sinon. La fonction h est T -périodique sur $\mathbb{R}$ pour tout nombre rationnel $T > 0$. Le groupe G associé à la fonction h est égal à $\mathbb{R}$, donc n'est pas de la forme $T\mathbb{Z}$ pour un nombre strictement positif T .

Les fonctions T -périodiques sont caractérisées par leurs valeurs sur un intervalle fondamental pour la période T .

Déf: Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est fondamental pour la période T si et seulement si il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $I = [a, a+2\pi[$ ou $I =]a, a+2\pi]$.

Ex: Les intervalles $] -\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$ sont fondamentaux pour la période 2π .

Thm: Soit I un intervalle fondamental pour la période T . Étant donné une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe une unique fonction T -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Dém: Supposons que f est une fonction T -périodique telle que : $\forall x \in I, f(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n_n \in \mathbb{Z}$ s.t. $x - n_n T \in I$; par T -périodicité, $f(x) = f(x - n_n T) = g(x - n_n T)$, d'où l'unicité et l'existence de la fonction f .

Ex: Soit $\forall x \in [0, 2\pi[$, $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$. L'unique fonction 2π -périodique f telle que : $\forall x \in [0, 2\pi[$, $f(x) = g(x)$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi - x + 2h\pi}{2}$ si $2h\pi \leq x < 2(h+1)\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

Dém: En pratique, une fonction T -périodique est souvent définie par sa valeur sur

un intervalle fondamental de période T .

Les propriétés des fonctions T -périodiques ne dépendent pas de la valeur du nombre $T > 0$. Il est en effet toujours possible de se ramener à des fonctions 2π -périodiques.

Élem. (i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction T -périodique. Posons:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right).$$

La fonction g est 2π -périodique.

(ii) De plus, l'application qui, à la fonction f associe la fonction g , est une bijection de l'ensemble des fonctions T -périodiques sur l'ensemble des fonctions 2π -périodiques.

Dém. (i) Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T(x + 2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = g(x)$.

(ii) La bijection réciproque est en effet définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$, laquelle transforme la fonction 2π -périodique g en la fonction T -périodique f .

Ex. Sachant que la fonction cosinus est 2π -périodique, la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(\sqrt{2}x),$$

est $\sqrt{2}\pi$ -périodique sur $\mathbb{R}$.

Dém. Dans toute la suite de ce chapitre, nous nous limiterons à l'analyse des fonctions T -périodiques. Mais énonçons pour preuve les principaux résultats dans le cas T -périodique, en particulier afin de préciser les formules associées dans le cas général.

b. Espaces de fonctions périodiques.

Mais supposons que $T = 2\pi$. Dans la suite, les critères de convergence des séries de Fourier que nous énoncerons reposeront sur des conditions de régularité des fonctions 2π -périodiques considérées. C'est la raison pour laquelle nous sommes amenés à considérer les espaces

$$\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ t.q. } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \},$$

des fonctions 2π -périodiques et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, pour $k \geq 0$ ou $k = \infty$, et à introduire les espaces de fonctions 2π -périodiques et de classe $\mathcal{C}^k$ par

morceaux similaires.

Déf: Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point), et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$ du segment $[a, b]$ telle que:

- (i) f est continue sur chacun des intervalles $]x_h, x_{h+1}[$ pour $0 \leq h \leq n-2$,
- (ii) f se prolonge par continuité à chacun des segments $[x_h, x_{h+1}]$ pour $0 \leq h \leq n-2$, c'est-à-dire qu'elle possède des limites lorsque $x \rightarrow x_h^+$ et $x \rightarrow x_{h+1}^-$ pour tout $0 \leq h \leq n-2$.

Ex: Soit $\forall x \in (-\pi, \pi)$, $f(x) = 1$ si $x > 0$, 0 si $x = 0$, -1 si $x < 0$; la fonction f est bien définie sur le segment $(-\pi, \pi)$, continue sur les intervalles $(-\pi, 0[$ et $]0, \pi)$, et elle vérifie: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. La fonction f est donc continue par morceaux sur le segment $(-\pi, \pi)$.

Déf: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ex: Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $g(x) = 1$ si $2n\pi < x < (2n+1)\pi$, 0 si $x = 2n\pi$, -1 si $(2n+1)\pi < x < 2(n+1)\pi$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$; la fonction g est bien définie, 2π -périodique et continue par morceaux.

Rem: (i) L'espace des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$

$$\mathcal{C}_{2\pi, \text{pm}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et continue par morceaux sur } \mathbb{R} \},$$

est un espace vectoriel pour le produit scalaire et l'addition des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, le produit de deux fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ demeure une fonction 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit I un intervalle fondamental pour la période 2π . Si g est une fonction continue sur l'intervalle I qui se prolonge par continuité à chacune des bornes de cet intervalle, alors, l'unique fonction 2π -périodique f associée à la fonction g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$.

si et seulement si les limites de la fonction g aux deux bornes de l'intervalle I sont identiques.

Ex: (i) Soit $\forall x \in (0, 2\pi[$, $g(x) = x$; comme la fonction g est continue sur $(0, 2\pi[$, l'unique fonction 2π -périodique f associée à la fonction g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $\forall x \in (0, 2\pi[$, $g(x) = x$ si $0 \leq x \leq \pi$, $2\pi - x$ si $\pi \leq x < 2\pi$; comme la fonction g est continue sur $(0, 2\pi[$, avec $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2\pi^-} 0$, l'unique fonction 2π -périodique f associée à la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ sont intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$. Leur intégrale sur un intervalle fondamental de période 2π ne dépend pas du choix de cet intervalle.

Def: Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi-m}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Quel que soit le nombre $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ est bien définie, et elle vaut:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Dém: (i) Considérons une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} = a + 2\pi$ du segment $(a, a + 2\pi)$

telle que la fonction f se prolonge par continuité à chacun des segments

(x_h, x_{h+1}) pour $0 \leq h \leq n-2$; l'intégrale $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ est alors bien

définie par la relation de Charles: $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \sum_{h=0}^{n-2} \int_{x_h}^{x_{h+1}} f(x) dx$.

(ii) Par la relation de Charles, elle vérifie: $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{a+2\pi} f(x) dx$
 $+ \int_{a+2\pi}^a f(x) dx = - \int_0^a f(y) dy + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_0^a f(y) dy = \int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Ex: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} \cos(x) dx = \sin(a+2\pi) - \sin(a) = 0 = \int_0^{2\pi} \cos(x) dx$.

La définition des fonctions continues par morceaux s'étend à celle des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux pour $k \geq 1$ ou $k = \infty$.

Def: Soit (a, b) un segment de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et $k \geq 1$ (ou $k = \infty$).

Une fonction $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur le

segment $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$ du segment $[a, b]$ telle que :

- (i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur chacun des intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ pour $0 \leq j \leq n-1$,
- (ii) f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^k$ à chacun des segments $[x_j, x_{j+1}]$ pour $0 \leq j \leq n-1$, c'est-à-dire qu'elle possède, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k des limites lorsque $x \rightarrow x_j^+$ et $x \rightarrow x_{j+1}^-$ pour tout $0 \leq j \leq n-1$.

Ex. Soit $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = 1$ si $x > 0$, 0 si $x = 0$, -1 si $x < 0$; la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Déf. Soit $k \geq 1$ (ou $k = \infty$), et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ex. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$ si $2k\pi < x < (2k+2)\pi$, 0 si $x = 2k\pi$, -1 si $(2k+2)\pi < x < (2k+4)\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; la fonction g est bien définie, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dém. (i) Les espaces

$$\mathcal{C}_{2\pi, m}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et de classe } \mathcal{C}^k \text{ par morceaux sur } \mathbb{R} \},$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}_{2\pi, m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, qui sont de plus stables par le produit des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- (ii) Soit I un intervalle fondamental pour la période 2π . Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I qui se prolonge de façon $\mathcal{C}^k$ à chacune des bornes de cet intervalle, alors, l'unique fonction 2π -périodique f associée à la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ex. Soit $\forall x \in (0, 2\pi[$, $g(x) = x$; comme la fonction g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, 2\pi[$, l'unique fonction 2π -périodique f associée à la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- (iii) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, m}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Considérons une subdivision $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = 2\pi$ du segment $(0, 2\pi[$ telle que f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^k$ à chacun des segments $[x_h, x_{h+1}]$ pour $0 \leq h \leq n-1$. La dérivée f' est bien définie sur chacun des intervalles $]x_h, x_{h+1}[$ et elle se prolonge en une

application de classe $\mathcal{C}^{h-2}$ sur chacun des segments $[x_h, x_{h+1}]$. Quel que soit le choix des valeurs pour étendre la fonction f' aux points $x_0, \dots, x_1$, la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^{h-2}$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$, et se prolonge en une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^{h-2}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, dès lors que $g(x_1) = g(x_0)$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2h\pi$ si $2h\pi \leq x < 2(h+2)\pi$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
la fonction f est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$;
si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$, alors g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $g(x) = f'(x)$.

2. Polynômes trigonométriques

a. Définition réelle

Déf: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction f est un polynôme trigonométrique si et seulement s'il existe un entier $N \geq 2$ et des coefficients réels ou complexes $(a_h)_{0 \leq h \leq N}$ et $(b_h)_{1 \leq h \leq N}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{h=1}^N [a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)].$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 3 \cos(x) + 4 \sin(2x)$; la fonction f est un polynôme trigonométrique.

Les coefficients $(a_h)_{0 \leq h \leq N}$ et $(b_h)_{1 \leq h \leq N}$ qui définissent un polynôme trigonométrique sont définis de manière unique.

lem: Soit $h \geq 1$ et $l \geq 1$.

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx) \, dx = 0, \text{ et } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(hx) \, dx = 0.$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx) \sin(lx) \, dx = 0.$$

$$(iii) \quad \text{Si } h \neq l, \text{ alors: } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx) \cos(lx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(hx) \sin(lx) \, dx = 0.$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx)^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(hx)^2 \, dx = 1.$$

Dém: (i) résulte du fait que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$; (ii), (iii) et (iv) sont

basées sur les identités : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(hx) \sin(lx) = \frac{1}{2} [\sin((h+l)x) + \sin(-(h+l)x)]$,
 $\cos(hx) \cos(lx) = \frac{1}{2} [\cos((h+l)x) + \cos((h-l)x)]$, et $\sin(hx) \sin(lx) = \frac{1}{2} [-\cos((h+l)x) + \cos((h-l)x)]$, et de nouveau, le fait que $\cos' = -\sin$, et $\sin' = \cos$.

Prop: Considérons un polynôme trigonométrique f donné par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)).$$

Les coefficients $(a_h)_{0 \leq h \leq N}$ et $(b_h)_{1 \leq h \leq N}$ de ce polynôme trigonométrique satisfont:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ et } \forall 1 \leq h \leq N, a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(hx) dx, \text{ et } b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(hx) dx.$$

Dém: Par la lemme précédent, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{h=1}^N \left(a_h \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx) dx + b_h \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(hx) dx \right) = a_0$; de même, $\forall 1 \leq h \leq N, a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(hx) dx$ et $b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(hx) dx$.

Le fait que les coefficients $(a_h)_{0 \leq h \leq N}$ et $(b_h)_{1 \leq h \leq N}$ soient définis de manière unique permet de définir le degré d'un polynôme trigonométrique.

Déf: Considérons un polynôme trigonométrique f donné par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)).$$

Le degré du polynôme trigonométrique f est égal à $+\infty$ si f est la fonction nulle, et, si f est non nulle, à:

$$d^0(f) = \max \{ h \geq 0 \text{ tel que } a_h \neq 0 \text{ ou } b_h \neq 0 \}.$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 + \sin(x) - \sin(3x) + 2\cos(2x)$; la fonction f est un polynôme trigonométrique de degré égal à 3.

L'ensemble $P_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques est un sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ qui est engendré par la base suivante.

Prop: Soit

$$\forall h \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f_h(x) = \cos(hx), \text{ et } \forall h \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, g_h(x) = \sin(hx).$$

La famille $((f_h)_{h \geq 0}, (g_h)_{h \geq 1})$ est une base de l'espace vectoriel $P_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém: Le caractère générateur de cette famille résulte de la définition d'un polynôme trigonométrique, et le caractère libre de l'unicité des coefficients $(a_h)_{0 \leq h \leq N}$ et $(b_h)_{1 \leq h \leq N}$.

de ce polynôme.

Cor: Pour $N \geq 0$, posons:

$$\mathcal{P}_{2N}^N(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{f \in \mathcal{P}_{2N}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ t.q. } d'(f) \leq N\}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}_{2N}^N(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un sous-espace de dimension finie égale à $2N+2$ de $\mathcal{P}_{2N}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, qui est engendré par la base $((f_k)_{0 \leq k \leq N}, (g_k)_{0 \leq k \leq N})$.

Dém: Nous vérifions que $\mathcal{P}_{2N}^N(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \text{Vect}((f_k)_{0 \leq k \leq N}, (g_k)_{0 \leq k \leq N})$, ce qui assure que c'est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{P}_{2N}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Comme la famille $((f_k)_{0 \leq k \leq N}, (g_k)_{0 \leq k \leq N})$ est libre par la proposition précédente, c'est une base de $\mathcal{P}_{2N}^N(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ qui est donc de dimension $2N+2$.

b. Définition complexe

Les formules d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, & \text{et} \quad \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta), \end{cases} \\ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

conduisent à une définition équivalente des polynômes trigonométriques sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles complexes.

Prop: (i) Considérons un polynôme trigonométrique f donné par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

$$\text{Alors: } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \text{ avec:}$$

$$c_0 = a_0 \text{ et } \forall 1 \leq k \leq N, c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),$$

$$\text{et } c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

(ii) Supposons qu'une fonction f s'écrit sous la forme:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}.$$

Alors la fonction f est un polynôme trigonométrique:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \text{ avec:}$$

$$a_0 = c_0 \text{ et } \forall 1 \leq k \leq N, a_k = c_k + c_{-k},$$

$$\text{et } b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Dém: Les formules (i) et (ii) résultent des formules d'Euler précédentes.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = i e^{-ix} + 2 e^{ix} - 3 e^{2ix}$; la fonction f est un polynôme trigonométrique.

Les coefficients $(c_h)_{-N \leq h \leq N}$ qui définissent la forme complexe d'un polynôme trigonométrique sont aussi définis de manière unique.

Lem: Soit $(h, l) \in \mathbb{Z}^2$. Alors:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihx} e^{-ilx} dx = 1 \text{ si } h=l, \text{ 0 sinon.}$$

Dém: Pour $h=l$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihx} e^{-ihx} dx = 1$, et si $h \neq l$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihx} e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-l)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i(h-l)\pi} - e^{-i(h-l)\pi}}{i(h-l)} \right) = 0$.

Prop: Considérons un polynôme trigonométrique f donné par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{h=-N}^N c_h e^{ihx}.$$

Les coefficients $(c_h)_{-N \leq h \leq N}$ de ce polynôme trigonométrique satisfont:

$$\forall -N \leq h \leq N, c_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ihx} dx.$$

Dém: Par la lemme précédent: $\forall -N \leq h \leq N$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ihx} dx = \sum_{l=-N}^N c_l \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihx} e^{-ilx} dx = c_h$.

Ex: Soit

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e^{ihx} = e^{ihx}.$$

La famille $(e^{ihx})_{h \in \mathbb{Z}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Dém: Le caractère générateur de cette famille résulte de l'équivalence entre les formes réelles et complexes d'un polynôme trigonométrique. Le caractère libre de l'unicité des coefficients $(c_h)_{-N \leq h \leq N}$.

Le degré d'un polynôme trigonométrique est donné par l'expression suivante. Lorsque ce polynôme est écrit dans sa forme complexe.

Prop: Considérons un polynôme trigonométrique f donné par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{h=-N}^N c_h e^{ihx}.$$

Le degré du polynôme trigonométrique f est égal à $-\infty$ si f est identiquement nulle, et vaut:

$d^0(f) = \max \{k \geq 0 \text{ tel que } c_k \neq 0 \text{ ou } c_{-k} \neq 0\}$,
si f est non nulle.

Dém: Cette formule résulte des identités: $c_0 = a_0$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$,
et $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{i5x} - e^{-ix} + 3e^{ix}$; le degré du polynôme trigonométrique que f est égal à 5.

Cor: Soit $N \geq 0$. La famille $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ est une base du sous-espace $\mathcal{P}_{2N}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Dém: Cette famille est génératrice, et son cardinal $2N+1$ est la dimension de $\mathcal{P}_{2N}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc il s'agit bien d'une base de ce sous-espace.

3. Coefficients et série de Fourier d'une fonction périodique.

Lorsqu'une fonction f est un polynôme trigonométrique, elle s'écrit sous la forme:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^N (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)) \\ = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx},$$

où $N \geq 0$ est le degré du polynôme trigonométrique, et les coefficients $(a_n(f))_{n \geq 0}$, $(b_n(f))_{n \geq 1}$ et $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont donnés par les formules:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

et:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Chacun de ces coefficients garde un sens lorsque la fonction f n'est plus que 2π -périodique, et par exemple, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il est naturel de se demander s'il est alors possible de décomposer cette fonction à l'aide des coefficients $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, ou $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$. Dans ce cas général, cette décomposition ne peut plus se présenter sous la forme de l'une des combinaisons linéaires précédentes (auquel cas la fonction f est par définition un polynôme trigonométrique), mais sous la forme d'une série trigonométrique:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

Cette série trigonométrique est la série de Fourier de la fonction f , que nous allons maintenant définir plus précisément, avant de nous intéresser à ses propriétés de convergence.

a. Définitions et exemples

Considérons une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles ou complexes.

(i) Définition réelle des coefficients et de la série de Fourier

Déf: Les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ de la fonction f sont définis par:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Rem: (i) Lorsque la fonction f est à valeurs complexes, les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ sont des nombres complexes, qui n'ont pas de raison d'être réels. C'est le fait que les fonctions cosinus et sinus soient à valeurs réelles qui explique que ces coefficients de Fourier soient appelés coefficients réels.

(ii) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, ses coefficients de Fourier réels sont donnés par les formules:

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \\ \text{et } \forall n \geq 1, a_n(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \end{aligned}$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, \text{ et } 0 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{alors: } a_0(f) = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f) = 0, \text{ et } b_n(f) = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}.$$

Prop: Les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ de la fonction f sont bien définis et ils vérifient:

$$(i) |a_0(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx,$$

$$\text{et } \forall n \geq 1, |a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \text{ et } |b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x) dx \\ \text{et } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x) \cos(nx) dx, \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{cases}$$

Dém: (i) Comme les fonctions $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ et $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ sont définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, elles sont intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$, ce qui assure que les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ sont bien définis.

(ii) Les intégrales (i) résultent du fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq 1 \text{ et } |\sin(x)| \leq 1.$$

(iii) Les formules (ii) proviennent du fait que les fonctions $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ et $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ sont 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.

Def: La série de Fourier de la fonction f est la série de fonctions

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)),$$

où $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ sont les coefficients de Fourier réels de la fonction f .

Rem: (i) La convergence de la série de Fourier de la fonction f signifie donc la convergence des sommes partielles $(S_N(f))_{N \geq 0}$ définies par :

$$\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)).$$

(ii) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier est la série de fonctions :

$$a_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right).$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La série de Fourier de la fonction f est la série de fonctions :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(nx) \left(= \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x) \right).$$

(ii) Définition complexe des coefficients et de la série de Fourier.

Déf: Les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de la fonction f sont définis par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Dém: (i) Comme pour les coefficients de Fourier réels, l'appellation complexe des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ provient du fait que les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont naturellement à valeurs complexes.

(ii) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, ses coefficients de Fourier complexes sont donnés par les formules:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx.$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Alors: } c_0(f) = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_{2n}(f) = 0 \text{ et } c_{2n+1}(f) = \frac{1}{i\pi(2n+1)}.$$

Prop: Les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont bien définis et ils vérifient:

$$(i) \forall n \in \mathbb{Z}, |c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

$$(ii) \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Dém: La preuve est identique à celle pour les coefficients de Fourier réels.

Les coefficients de Fourier réels et complexes de la fonction f sont reliés par les formules suivantes.

Thm: (i) $a_0(f) = c_0(f)$.

$$(ii) \forall n \geq 1, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \text{ et } b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

$$(iii) \forall n \geq 1, c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)), \text{ et } c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)).$$

Dém: (i) En effet, $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = c_0(f)$.

$$(ii) \text{ Par les formules d'Euler: } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{inx} + e^{-inx}) dx = c_n(f) + c_{-n}(f), \text{ et } b_n(f) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{inx} - e^{-inx}) dx = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

$$(iii) \text{ D'après (ii), } \forall n \geq 1, c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)), \text{ et } c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)).$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Alors: } a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1, a_n(f) = 0 = c_n(f) + c_{-n}(f), \text{ et } b_n(f) = 0 = i(c_n(f) - c_{-n}(f)), \text{ tandis que } \forall n \geq 0, b_{2n+1}(f) = \frac{2}{\pi(2n+1)} = i(c_{2n+1}(f) - c_{-2n-1}(f)).$$

Ex: Les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 1}$, et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, et complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$

de la fonction f satisfait :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) = c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}$$

En particulier, les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de f vérifient :

$$\begin{aligned} \forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}] \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}. \end{aligned}$$

Dém. (i) Par le théorème précédent, $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) = (a_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx) = a_n(f) (\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n}(f) (\cos(nx) - i \sin(nx)) = c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}$.

(ii) Cette formule résulte de l'identité (i) et du fait que $a_0(f) = c_0(f)$.

Cor. La série de Fourier de la fonction f est la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} [c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

où $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction f .

Dém. C'est une conséquence de la formule précédente pour les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de f .

Rem. (i) La définition complexe précédente de la série de Fourier de la fonction f donne une expression équivalente de la définition réelle de cette série : les deux séries de fonctions considérées sont égales, de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la notion de série de Fourier de la fonction f .

(ii) En particulier, les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ sont définies par la formule :

$$\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx},$$

et la convergence de la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ sera à comprendre comme la convergence de ces sommes partielles.

(iii) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est continue par morceaux et T -périodique sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier est la série de fonctions :

$$c_0(f) + \sum_{n \neq 0} [c_n(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}} + c_{-n}(f) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}}$$

Ex. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La série de Fourier de la fonction f est la série de fonctions :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2n+1)x}}{i\pi(2n+1)} \quad \left(= \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 0} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x) \right).$$

b. Propriétés des coefficients de Fourier

Le calcul des coefficients de Fourier de la fonction f est facilité par les propriétés suivantes.

(i) Linéarité

Prop: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi, m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(i) $\forall n \geq 0, a_n(\lambda f + g) = \lambda a_n(f) + a_n(g)$, et $\forall n \geq 1, b_n(\lambda f + g) = \lambda b_n(f) + b_n(g)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)$.

Dém: Elle résulte de la linéarité de l'intégrale qui assure par exemple que: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\lambda f + g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(x) + g(x)) e^{-inx} dx = \lambda c_n(f) + c_n(g).$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi), f(x) = 2 \text{ si } x \geq 0, -2 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{Alors: } a_0(f) = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f) = 0, \text{ et } b_n(f) = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

(ii) Coefficients de Fourier de la fonction conjuguée

Prop: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(i) $\forall n \geq 0, a_n(\bar{f}) = \overline{a_n(f)}$, et $\forall n \geq 1, b_n(\bar{f}) = \overline{b_n(f)}$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.

Dém: (i) résulte du caractère réel des fonctions cosinus et sinus; pour (ii), $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\bar{f})$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-inx} dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i(-n)x} dx} = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Ex: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi, m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(i) $\forall n \geq 0, a_n(f) \in \mathbb{R}$, et $\forall n \geq 1, b_n(f) \in \mathbb{R}$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

Dém: Comme f est à valeurs réelles, elle est égale à sa fonction conjuguée, d'où:

$\forall n \geq 0, a_n(f) = \overline{a_n(f)}$, et $\forall n \geq 1, b_n(f) = \overline{b_n(f)}$, ce qui garantit que les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$ sont réels; de plus, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_{-n}(f) = c_n(f) = \overline{a_n(f)}.$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } |x| \leq \frac{\pi}{2}, 0 \text{ sinon.}$$

$$\text{alors: } \forall n \geq 0, c_{2n}(f) = c_{-2n}(f) = 0, \text{ et } c_{2n+1}(f) = \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)} = c_{f(2n+1)}(f)$$

(iii) Coefficients de Fourier des fonctions paires et impaires

Démo: Posons:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \check{f}(x) = f(-x).$$

La fonction $\check{f}$ est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec:

$$(i) \forall n \geq 0, a_n(\check{f}) = a_n(f), \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(\check{f}) = -b_n(f).$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\check{f}) = c_{-n}(f).$$

Dém: Comme f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\check{f}$ est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec par exemple: $\forall n \geq 1, a_n(\check{f}) =$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \cos(nx) dx \stackrel{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(y) \cos(-ny) dy = a_n(f), \text{ et } b_n(\check{f}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \sin(nx) dx \stackrel{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(y) \sin(-ny) dy = -b_n(f); \text{ de même, } a_0(\check{f}) = a_0(f) = a_0(f) = a_0(f), \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(\check{f}) = c_{-n}(f).$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \leq 0, 0 \text{ si } x > 0.$$

$$\text{alors: } a_0(f) = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 2, a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = -\frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Prop: Supposons que la fonction f est paire, soit que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

alors:

$$(i) a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \text{ et } b_n(f) = 0.$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_{-n}(f).$$

Dém: Tout d'abord que $\check{f} = f$, $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_{-n}(f)$, et $\forall n \geq 2, b_n(f) = 0$; de plus,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^0 f(x) dx \right) \stackrel{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \text{ et de même, } \forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par:

$\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, 0 sinon.

alors: $a_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = 0 = a_{-n}(f)$, $\forall n \geq 0$, $a_{-n+1}(f) = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}$, $\forall n \geq 1$, $c_{-n}(f) = c_{-n}(f) = 0$, et $\forall n \geq 0$, $c_{-n+1}(f) = c_{-n+1}(f) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}$.

Prop: Supposons que la fonction f est impaire, soit que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x).$$

alors:

$$(i) \forall n \geq 0, a_n(f) = 0, \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n}(f) = -c_n(f).$$

Dém: Sachant que $\tilde{f} = -f$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_{-n}(f) = -c_n(f)$, et $\forall n \geq 0$, $a_n(f) = 0$; de plus,

$$\forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1, \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ si } x = 0, \text{ et } -1 \text{ si } x < 0.$$

$$\text{alors: } \forall n \in \mathbb{Z}, a_{-n}(f) = 0, \text{ et } a_{-n+1}(f) = \frac{2}{i\pi(2n+1)}, \forall n \geq 0, a_n(f) = 0, \text{ et}$$

$$\forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Rem: (i) Il suffit que la fonction f soit paire ou impaire, sauf en un ensemble de points de mesure nulle, pour que les deux propositions précédentes soient valables.

(ii) Ces deux propositions simplifient beaucoup le calcul pratique des coefficients de Fourier (réels ou complexes), puisqu'il suffit d'en calculer la moitié pour les connaître tous.

(iv) Coefficients de Fourier d'une fonction dérivée.

Prop: Supposons que la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. alors:

$$(i) a_0(f') = 0, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f') = n b_n(f), \text{ et } b_n(f') = -n a_n(f).$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = i n c_n(f).$$

Dém: Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, f' est continue par morceaux sur

$$\mathbb{R}, \text{ avec: } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left([f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} + i n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right), \text{ au sens où: } [f(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (f(x) e^{-inx}) - \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (f(x) e^{-inx}) = 0 \text{ par continuité de la fonction } f \Rightarrow c_n(f') = i n c_n(f); \text{ de même, } a_0(f') = 0, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n(f') = n b_n(f), \text{ et } b_n(f') = -n a_n(f).$$

Ex: Soit $h \geq 1$. Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{h-1}$ sur $\mathbb{R}$, et que la dérivée $f^{(h-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors:

(i) Si $h \in \mathbb{N}$, alors: $\forall n \geq 0$, $a_n(f^{(h)}) = (-1)^{\frac{h}{2}} n^h a_n(f)$, et $\forall n \geq 1$, $b_n(f^{(h)}) = (-1)^{\frac{h}{2}} n^h b_n(f)$.

(ii) Si $h \notin \mathbb{N}$, alors: $\forall n \geq 0$, $a_n(f^{(h)}) = (-1)^{\frac{h-1}{2}} n^h b_n(f)$, et $\forall n \geq 1$, $b_n(f^{(h)}) = -(-1)^{\frac{h-1}{2}} n^h a_n(f)$.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $c_\alpha(f^{(h)}) = (i\alpha)^h c_\alpha(f)$.

Dém: Ces formules résultent de celles de la proposition précédente par récurrence sur $h \geq 1$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = -x \text{ si } x \leq 0, \text{ et } x \text{ si } x > 0.$$

La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et l'une de ses dérivées est définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f'(x) = -1 \text{ si } x \leq 0, \text{ et } 1 \text{ si } x > 0.$$

De plus: $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $a_{2n}(f) = 0$ et $a_{2n+1}(f) = -\frac{1}{\pi(2n+1)^2} = \frac{c_{2n+1}(f')}{i(2n+1)}$, et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f) = -\frac{1}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{n^2} = -\frac{b_n(f')}{n}$, et $b_n(f) = 0 = \frac{a_n(f')}{n}$.

Dém: Cette proposition est fautive (de même que la corollaire qui s'ensuit) lorsque la fonction f (respectivement la dérivée $f^{(h-1)}$) n'est pas continue, mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = x \text{ si } x > 0, \text{ et } 0 \text{ si } x \leq 0.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et l'une de ses dérivées est définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f'(x) = 1 \text{ si } x > 0, \text{ et } 0 \text{ si } x \leq 0.$$

$$\text{Mais: } c_2(f) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{6} \neq \frac{c_2(f')}{i^2} = \frac{1}{2}.$$

(*) Coefficients de Fourier d'une fonction primitive

Une primitive d'une fonction 2π -périodique n'est pas en général 2π -périodique.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et $F(x) = x$. La fonction F est une primitive de

la fonction f , mais la fonction F n'est pas 2π -périodique, alors que la fonction f est 2π -périodique.

Prop: Supposons que la fonction F est une primitive de la fonction f , au sens où il existe un nombre $A \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = A + \int_0^x f(y) dy.$$

La primitive F est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si: $a_0(f) = c_0(f) = 0$.

Dém: $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy = a_0(f) = c_0(f).$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = -1 \text{ si } x \leq 0, 1 \text{ si } x > 0.$$

Alors, $a_0(f) = c_0(f) = 0$, et la fonction 2π -périodique F définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = -x \text{ si } x \leq 0, x \text{ si } x > 0,$$

est une primitive de la fonction f .

Prop: Supposons que :

$$a_0(f) = c_0(f) = 0,$$

et considérons une primitive F de la fonction f . Alors:

$$(i) \forall n \geq 1, a_n(F) = -\frac{b_n(f)}{n}, \text{ et } b_n(F) = \frac{a_n(f)}{n}.$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in}.$$

Dém: Comme la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de dérivée égale à la fonction f , les formules (i) et (ii) résultent de celles des coefficients de Fourier d'une dérivée.

Ex: Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], F(x) = |x|.$$

La fonction F est une primitive de la fonction 2π -périodique et continue par morceaux f définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = -1 \text{ si } x \leq 0, 1 \text{ si } x > 0.$$

De plus, $\forall n \geq 2, a_n(F) = -\frac{2(-1)^n(-1)^n}{\pi n^2} (= -\frac{b_n(f)}{n})$ et $b_n(F) = 0 (= \frac{a_n(f)}{n})$, tandis que $\forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(F) = -\frac{2(-1)^n}{\pi n^2} (= \frac{c_n(f)}{in})$.

Dém: La valeur des coefficients $a_0(F) = c_0(F)$ dépend du choix de la primitive F de la fonction f .

Ex: Soit $F_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $F_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les fonctions 2π -périodiques définies par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], F_1(x) = |x| \text{ et } F_2(x) = |x| - 1.$$

Les fonctions F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction 2π -périodique f définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = -1 \text{ si } x \leq 0, \text{ et } 1 \text{ si } x > 0.$$

$$\text{Mais: } C_0(F_1) = \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} - 1 = C_0(F_2).$$

1. Séries trigonométriques

a. Définitions et exemples

(i) Définition réelle d'une série trigonométrique

Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$.

Déf: La série trigonométrique associée aux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ est la série de fonctions:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+1}$. La fonction S est la série trigonométrique associée aux suites $(\frac{1}{n^2+1})_{n \geq 0}$ et $(0)_{n \geq 1}$.

Lemme: Soit $c_0 = a_0$, $\forall n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. Alors:

$$\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{h=-N}^N c_h e^{ihx}.$$

Démon: En effet: $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = c_0 + \sum_{h=1}^N \frac{1}{2} (a_h e^{ihx} + a_h e^{-ihx} + i b_h e^{ihx} - i b_h e^{-ihx}) = c_0 + \sum_{h=1}^N (a_h e^{ihx} + b_h e^{-ihx}) = \sum_{h=-N}^N c_h e^{ihx}.$

Ex: $\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\cos(nx)}{n^2+1} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{e^{inx}}{2(n^2+1)} + \sum_{n=1}^N \frac{e^{-inx}}{2(n^2+1)}$.

Rem: Le lemme précédent assure que la convergence de la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ revient à celle de la série de fonctions $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ pour les coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ donnés par le lemme.

(ii) Définition complexe d'une série trigonométrique

Considérons une suite de nombres réels ou complexes $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Déf: La série trigonométrique associée à la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|} e^{inx}$. La fonction S est la série trigonométrique associée à la suite $(e^{-|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Lea: Soit $a_0 = c_0$, $\forall n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Alors:

$$\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Dém: En effet: $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n (\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n} (\cos(-nx) + i \sin(-nx)))$
 $= a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Ex: $\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{-|n|} e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^N e^{-n} \cos(nx)$.

Rem: La convergence de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est "analytique" au sens où il s'agit de déterminer la limite de ses sommes partielles in la fois lorsque $N \rightarrow +\infty$ et lorsque $N \rightarrow -\infty$. Dans le cadre de l'analyse des séries de Fourier, le lemme précédent permet de lever cette ambiguïté, même s'il est permis de concevoir des notions plus générales de convergence de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

5. Convergence simple des séries trigonométriques

(i) Convergence simple de la définition réelle

Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, et notons $(S_N)_{N \geq 0}$ les sommes partielles de la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$:

$$\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Déf: La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ si, quel que soit le nombre $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $S(x) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que:

$$S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S(x).$$

Dans ce cas, la fonction somme S notée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

est bien définie et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Déf: En cas de convergence simple sur $\mathbb{R}$, et sachant que : $\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x+2\pi) = S_N(x), S(x+2\pi) = S(x) \Rightarrow S$ est bien 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Ex: Soit $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{1+n^2}$, et $\forall n \geq 1, b_n = \frac{1}{n^2}$. La série trigonométrique $1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\cos(nx)}{1+n^2} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Rem: Cette définition s'étend sans difficulté au cas où la convergence simple de la série trigonométrique est restreinte à un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$.

(ii) Convergence simple de la définition complexe

Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et introduisons les sommes partielles

$$\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^N [c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}].$$

Déf: La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ si, quel que soit le nombre $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre $S(x) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que :

$$S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S(x).$$

Dans ce cas, la fonction somme S vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

est bien définie et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Dém: Elle est identique à celle pour la définition réelle.

Ex: Soit $\forall n \geq 0, c_n = e^{-|n|}$. La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|} e^{inx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Rem: (i) Cette définition s'étend sans difficulté au cas où la convergence simple de la série trigonométrique est restreinte à un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$.

(ii) Cette définition est restreinte au sens où, en principe, la convergence simple de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ devrait être définie à partir de la convergence lorsque $N_+ \rightarrow +\infty$ et $N_- \rightarrow +\infty$ des sommes partielles :

$$\forall N_+ \geq 0, \forall N_- \geq 1, S_{N_+, N_-}(x) = \sum_{n=-N_-}^{N_+} c_n e^{inx}.$$

Cette définition équivaut néanmoins à celle de la convergence simple de la définition réelle d'une série trigonométrique.

Prop: Soit $a_0 = 1$, et $\forall n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les sommes des ces deux séries trigonométriques sont égales:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Dém: Elle résulte de l'identité: $\forall N \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$

Ex: Soit $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{1+n^2}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{1+n^2}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme vaut: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{1+n^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$.

La preuve de la convergence simple de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ utilise souvent la lemme suivant.

LEM: Si les séries de fractions $\sum_{n \geq 0} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n \geq 1} c_{-n} e^{-inx}$ sont simplement convergentes sur $\mathbb{R}$, alors, la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-inx}.$$

Dém: Elle résulte de la formule: $\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^N c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-inx}.$

Ex: Soit $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$. Comme les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} e^{inx}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} e^{-inx}$ sont simplement convergentes sur $\mathbb{R}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} e^{inx}$ est aussi simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

Rem: La réciproque de ce lemme est fausse en général.

Ex: Soit $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 1$ si $n \leq -1$, 0 si $n=0$, et 1 si $n \geq 1$. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}$ est convergente, mais les séries $\sum_{n \geq 0} e^{inx} (= \sum_{n \geq 0} 1)$ et $\sum_{n \geq 1} e^{-inx} (= \sum_{n \geq 1} 1)$ sont divergentes.

c. Convergence uniforme des séries trigonométriques

Considérons l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, et introduisons la norme uniforme sur cet espace qui est définie par:

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Sachant que la fonction f est 2π -périodique et continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, nous pouvons aussi définir cette norme par l'expression:

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Cette norme permet de définir la convergence uniforme d'une série trigonométrique de la façon suivante.

Déf: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$, et notons:

$$\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ si il existe une fonction $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ telle que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, la fonction somme S vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et notons:

$$\forall N \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ si il existe une fonction $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ telle que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, la fonction somme S vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Dém: (i) Le fait que la somme S soit bien définie et 2π -périodique découle du fait que la convergence uniforme implique la convergence simple de la série trigonométrique.

(ii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $N \geq 0$, nous écrivons: $|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| \leq |S_N(x) - S_N(x_0)| + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)|$; comme on

convergence est uniforme, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S(x) - S_{N_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$ pour tout nombre $\varepsilon > 0$ fixé; sachant que la somme partielle S_{N_ε} est continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|S_{N_\varepsilon}(x) - S_{N_\varepsilon}(x_0)| \leq \varepsilon \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| \leq 3\varepsilon \Rightarrow S$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex: Les séries trigonométriques $1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$ ou $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} e^{inx}$ sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

Dém: (i) Comme une série trigonométrique uniformément convergente est simplement convergente, les remarques valables pour la convergence simple restent pertinentes pour la convergence uniforme.

(ii) Sachant que la fonction somme S appartient in fine à l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la convergence uniforme de la série trigonométrique considérée équivaut à l'existence d'une fonction $S \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que :

$$\|S_N - S\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme un polynôme trigonométrique, une série trigonométrique uniformément convergente est identiquement égale à sa série de Fourier.

théor: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Si la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est uniformément convergente de somme S , alors les coefficients de Fourier réels de la somme S valent :

$$\forall n \geq 0, a_n(S) = a_n, \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(S) = b_n.$$

En particulier, la somme S est égale à sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0(S) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(S) \cos(nx) + b_n(S) \sin(nx)).$$

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Si la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est uniformément convergente de somme S , alors les coefficients de Fourier complexes de la somme S valent :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(S) = c_n.$$

En particulier, la somme S est égale à sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(S) e^{inx}.$$

Dém: Pour $n \geq 1$, calculons par exemple : $\forall N \geq n, a_n(S) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx) dx$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(S(x) - a_0 - \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)) \right) \cos(nx) dx \\
&\quad + \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^N \left(a_h \int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx) \cos(nx) dx + b_h \int_{-\pi}^{\pi} \sin(hx) \cos(nx) dx \right) \\
&= a_n + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(S(x) - a_0 - \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)) \right) \cos(nx) dx \\
&\Rightarrow |a_n(S) - a_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(x) - a_0 - \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx))| dx \leq \frac{1}{\pi} \|S - a_0 - \sum_{h=1}^N (a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx))\|_{1, \mathbb{R}} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0 \\
&\Rightarrow a_n(S) = a_n; \text{ de même, } a_0(S) = a_0, \forall n \geq 1, b_n(S) = b_n, \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(S) = c_n; \text{ enfin, l'égalité avec la série de Fourier résulte de la définition de la somme.}
\end{aligned}$$

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$. Alors: $\forall n \geq 0, a_n(f) = 2^{-n}$, et $\forall n \geq 1, b_n(f) = 0$, avec de plus: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx)$.
(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} e^{inx}$. Alors: $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 2^{-|n|}$, avec de plus: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Rem: (i) Lorsque la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique f est convergente, sa somme n'est pas toujours égale à cette fonction (cf. le théorème de Dirichlet). Dans ce cas, la série de Fourier ne peut être uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) Il existe aussi des fonctions 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier est divergente en un point de $\mathbb{R}$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2^{n^2} + 2) \frac{x}{2})}{n^2}.$$

La fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$, avec: $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ et $\forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{+\infty} \int_0^{\pi} \cos(nx) \frac{\sin((2^{p^2} + 2) \frac{x}{2})}{p^2} dx$, et $b_n(f) = 0$.

Mais la série $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$ est divergente.

a. Convergence normale des séries trigonométriques

Def: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, et posons:

$$\forall n \geq 0, M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|.$$

La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 0} M_n$ est convergente.

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et posons :

$$\forall n \geq 0, M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|.$$

La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 0} M_n$ est convergente.

Ex: Les séries trigonométriques $1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$ ou $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|} e^{inx}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

Dém: (i) Pour $n \geq 0$, les fonctions $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ et $x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ sont 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Les nombres M_n sont donc bien définies et satisfont : $M_n = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$, respectivement, $M_n = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|$.

(ii) Dans le cas où les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ d'une part, et $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'autre part, sont reliées par les formules :

$$a_0 = c_0, \text{ et } \forall n \geq 1, a_n = c_n + c_{-n}, \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}),$$

la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cette équivalence résulte des identités $a_0 = c_0$, et : $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$.

La convergence normale d'une série trigonométrique implique sa convergence uniforme.

Thm: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Si la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Si la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Dém: (i) Soit $\forall n \geq 0, M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} M_n$ est convergente, et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq M_n$, les séries $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ sont absolument convergentes, donc convergentes ; soit $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, et $\forall N \geq 0, S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

$\cos(nx) + b_n \sin(nx)$; par définition, $|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - S(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$ la série $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) La preuve est identique à celle du cas réel (i).

Ex: Les séries trigonométriques $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 3^{-|n|} e^{inx}$ sont normalement convergentes, donc uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

Dém: Comme une série trigonométrique normalement convergente est uniformément convergente, les remarques valables pour la convergence uniforme restent valables pour la convergence normale.

Ex: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Si la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, alors, sa fonction somme S vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, les coefficients de Fourier réels de la somme S valent:

$$\forall n \geq 0, a_n(S) = a_n, \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(S) = b_n.$$

En particulier, la somme S est égale à sa série de Fourier:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0(S) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(S) \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Si la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, alors, sa fonction somme S vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, les coefficients de Fourier complexes de la somme S valent:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(S) = c_n.$$

En particulier, la somme S est égale à sa série de Fourier:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(S) e^{inx}.$$

Dém: Ces propriétés résultent du fait que la convergence normale d'une série trigonométrique implique sa convergence uniforme.

La convergence normale d'une série trigonométrique est caractérisée par le critère suivant.

Thm: (i) Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$ est convergente.

(ii) Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 1} (|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente.

Dém: (i) Soit $n \geq 1$. Il existe un nombre $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_n + ib_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{i\theta_n}$
 $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(\theta_n) \cos(nx) + \sin(\theta_n) \sin(nx))$
 $= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(\theta_n - nx) \Rightarrow M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Rightarrow$
 La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 1} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est convergente; comme $|a_n| + |b_n| \leq \sqrt{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \sqrt{2} (|a_n| + |b_n|)$, ceci équivaut à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$.

(ii) Soit $n \geq 1$. Il existe de même un nombre $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $c_n \overline{c_{-n}} = |c_n|^2$
 $|c_n|^2 e^{i\theta_n} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|^2 = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + 2|c_n||c_{-n}| \cos(\theta_n + 2nx)$
 $(c_n \overline{c_{-n}} e^{2inx}) = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + 2|c_n||c_{-n}| \cos(\theta_n + 2nx) \Rightarrow M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| = |c_n| + |c_{-n}| \Rightarrow$
 La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n \geq 1} (|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente.

Ex: Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Rem: Il existe des séries trigonométriques qui sont simplement convergentes sans être normalement convergentes.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique et impaire définie par:

$$\forall x \in (0, \pi], f(x) = 0 \text{ si } x = 0, \frac{\pi - x}{2} \text{ sinon.}$$

La fonction f est bien définie et de classe C^2 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et sa

série de Fourier est la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$. Par le théorème de

Dirichlet, cette série est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$.

Par contre, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, de sorte que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

La notion de convergence normale permet aussi d'étudier la dérivabilité des séries trigonométriques.

Thm: (i) Soit $h \in \mathbb{N}$. Considérons deux suites réelles ou complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que la série $\sum_{n \geq 1} n^h (|a_n| + |b_n|)$ est convergente. La série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa fonction somme S vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

est bien définie, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^h$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall 1 \leq j \leq h, \forall x \in \mathbb{R}, S^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^j (a_n \cos^{(j)}(nx) + b_n \sin^{(j)}(nx)).$$

(ii) Soit $h \in \mathbb{N}$. Considérons une suite réelle ou complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} n^h (|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente. La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa fonction somme S vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

est bien définie, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^h$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall 1 \leq j \leq h, \forall x \in \mathbb{R}, S^{(j)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (in)^j e^{inx}.$$

Dém: (i) Soit $0 \leq j \leq h$. Comme $\forall n \geq 1, n^j (|a_n| + |b_n|) \leq n^h (|a_n| + |b_n|)$, $\sum_{n \geq 1} n^j (|a_n| + |b_n|)$ est convergente $\Rightarrow$ la série trigonométrique $a_0 + \sum_{n \geq 1} n^j (a_n \cos^{(j)}(nx) + b_n \sin^{(j)}(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa fonction somme S_j est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$; si $0 \leq j \leq h-1$ et $N \geq 1$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + \sum_{n=1}^N n^j (a_n \cos^{(j)}(nx) + b_n \sin^{(j)}(nx)) = a_0 + \sum_{n=1}^N n^j (a_n \cos^{(j)}(n0) + b_n \sin^{(j)}(n0)) + \int_0^x \sum_{n=1}^N n^{j+1} (a_n \cos^{(j+1)}(nt) + b_n \sin^{(j+1)}(nt)) dt$; sachant que $\left| \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{j+1} (a_n \cos^{(j+1)}(nt) + b_n \sin^{(j+1)}(nt)) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{j+1} (|a_n| + |b_n|) |x|$, donc par convergence de cette série, à la limite $N \rightarrow +\infty$, $\int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{j+1} (a_n \cos^{(j+1)}(nt) + b_n \sin^{(j+1)}(nt)) dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ $\Rightarrow S_j(x) = S_j(0) + \int_0^x S_{j+1}(t) dt \Rightarrow$ la somme S_j est de classe

$\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}, S_j'(x) = S_{j+1}(x)$; par récurrence sur $0 \leq j \leq k-1$, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall 2 \leq j \leq k, \forall x \in \mathbb{R}, S^{(j)}(x) = S_j(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^j (a_n \cos^{(j)}(nx) + b_n \sin^{(j)}(nx))$.

(ii) La preuve est identique en remplaçant les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ par les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(c_n)_{n \geq 1}$.

Ex: Soit $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = e^{-|n|}$. Comme les séries $\sum_{n \geq 1} n^k e^{-n}$ sont convergentes quel que soit l'entier $k \geq 0$, la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|} e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|} e^{inx} = \frac{e^2}{1 + e^2 - 2e \cos(x)},$$

est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II Convergence des séries de Fourier

1. Théorème de Fejér et densité des polynômes trigonométriques

Considérons une fonction f 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Afin d'établir la convergence de la série de Fourier de cette fonction, nous commençons par montrer qu'il est possible de l'approcher, en un sens à préciser, par un polynôme trigonométrique. Dans le cas où la fonction f est continue, le théorème de Fejér assure que cette approximation peut être uniforme.

a. Théorème de Fejér

La preuve du théorème de Fejér requiert d'introduire les noyaux de Dirichlet et de Fejér.

Déf: Soit $N \geq 0$. Le noyau de Dirichlet D_N d'ordre N est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

Ex: Pour $N = 1$, le noyau de Dirichlet D_1 est égal à : $\forall x \in \mathbb{R}, D_1(x) = 1 + 2 \cos(x)$.

Chm: Soit $N \geq 0$. Le noyau de Dirichlet D_N est un polynôme trigonométrique pair de degré N qui vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus, il satisfait:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

Dém: Par définition, le noyau de Dirichlet D_N est un polynôme trigonométrique de degré

$$\begin{aligned} N \text{ tel que: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1; \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \text{ alors} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, e^{in\pi} &= 1 \Rightarrow D_N(x) = \sum_{k=-N}^N 1 = 2N+1; \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \text{ alors} \\ D_N(x) &= \sum_{k=0}^N e^{ikx} + \sum_{k=1}^N e^{-ikx} = \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} + e^{-ix} \frac{1 - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} - \frac{e^{-ix} - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1 - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{1 - e^{ix}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, D_N(-x) = D_N(x) \Rightarrow D_N \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Déf: Soit $N \geq 0$. Le noyau de Fejér F_N d'ordre N est défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\sum_{l=-k}^k e^{ilx} \right).$$

Ex: Pour $N=1$, le noyau de Fejér F_1 est égal à: $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = 1 + \cos(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Chm: Soit $N \geq 0$. Le noyau de Fejér F_N est un polynôme trigonométrique pair de degré N qui vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)^2}{\sin(\frac{x}{2})^2} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus, il satisfait:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1.$$

Dém: Par définition, le noyau de Fejér F_N est un polynôme trigonométrique de degré N

$$\begin{aligned} \text{tel que: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx \right) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N 1 = 1; \\ \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \text{ alors: } F_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (2k+1) = \frac{1}{N+1} (N(N+1) + N+1) = N+1; \\ \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \text{ alors: } F_N(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\sin((2k+1)\frac{x}{2})^2}{\sin(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \sum_{k=0}^N \sin^2\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \sum_{k=0}^N \frac{1 - \cos((2k+1)x)}{2} = \frac{1}{2(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \sum_{k=0}^N (1 - \cos((2k+1)x)) \\ &= \frac{1}{2(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \left((N+1) - \sum_{k=0}^N \cos((2k+1)x) \right) = \frac{1}{2(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \left((N+1) - \frac{\sin((N+1)x)}{\sin(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \left((N+1) - \frac{\sin((N+1)x)}{\sin(x)} \right) = \frac{1}{2(N+1)\sin(\frac{x}{2})^2} \left((N+1) - \frac{\sin((N+1)x)}{\sin(x)} \right) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, F_N(-x) = F_N(x) \Rightarrow F_N \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Def: Soit $N \geq 0$. Considérons les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f définies par:

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx},$$

$$\text{où } \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

La somme de Fejér $C_N(f)$ d'ordre N de la fonction f est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, C_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)(x).$$

Ex: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$. La fonction f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, et pour $N \geq 1$, elle satisfait: $\forall x \in \mathbb{R}, C_N(f)(x) = \cos(x)$.

Rem: La somme de Fejér $C_N(f)$ de la fonction f s'interprète comme la moyenne de Cauchy d'ordre N des sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f . Étant donnée une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \geq 0}$, les moyennes de Cauchy $(m_n)_{n \geq 0}$ de cette suite sont définies par:

$$\forall n \geq 0, m_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Lorsque la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le théorème de Cauchy assure que:

$$m_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l.$$

La réciproque est fautive en général. Une suite $(m_n)_{n \geq 0}$ des moyennes de Cauchy peut être convergente sans que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne soit convergente. Autrement dit, le fait de considérer les moyennes de Cauchy d'une suite améliore les propriétés de convergence.

Ex: Soit $\forall n \geq 0, u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est divergente, et ses moyennes de Cauchy sont égales à: $\forall n \geq 0, m_n = \frac{1}{n+1}$ si n est pair, 0 si n est impair, de sorte que: $m_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Prop: Soit $N \geq 0$. La somme de Fejér $C_N(f)$ d'ordre N de la fonction f est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N qui satisfait:

$$\forall x \in \mathbb{R}, C_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt.$$

Dém: Comme les sommes partielles $S_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n , la somme de Fejér est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N . De plus, elle satisfait: $\forall x \in \mathbb{R}, C_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{l=-k}^k c_l(f) e^{ilx}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{l=-k}^k e^{il(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(x-t) dt;$$

par le changement de variable $u = x - t$, $C_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) E_N(u) du$
 comme la fonction $u \mapsto f(x-u) E_N(u)$ est 2π -périodique, nous concluons que :

$$C_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) E_N(u) du.$$

La formule intégrale de la somme de Fejér $C_N(f)$ permet d'établir le Théorème de Fejér.

Théorème de Fejér: Supposons que la fonction f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Les sommes de Fejér $(C_N(f))_{N \geq 0}$ convergent uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |C_N(f)(x) - f(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém: (i) Comme la fonction f est continue sur $[-\pi, \pi]$, elle est uniformément continue et bornée sur ce segment; comme elle est 2π -périodique, elle est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe

donc un nombre $\delta > 0$ (tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ s.t. $|x - y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$).

Il existe de plus un nombre $\eta \geq 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \eta$.

(ii) Comme $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_N(t) dt = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $C_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du$;
 orant que la fonction E_N est positive, $|\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du| \leq$
 $\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} E_N(u) du \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_N(u) du = \varepsilon.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du| \leq \frac{\eta}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} E_N(u) du$
 $= \frac{\eta}{\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \frac{1}{N+1} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}u)^2}{\sin^2(\frac{u}{2})} du \leq \frac{2(\pi-\delta)\eta}{\pi(N+1)\sin^2(\frac{\delta}{2})} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \exists N_1$ tel
 qu'un nombre $N_1 \geq 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall N \geq N_1$, $|\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} E_N(u) (f(x-u) - f(x)) du| \leq \varepsilon$
 $\Rightarrow |C_N(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \forall N \geq N_1$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |C_N(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$,
 d'où la convergence uniforme des sommes de Fejér $(C_N(f))_{N \geq 0}$ vers la fonction f .

b. Densité des polynômes trigonométriques

Considérons l'espace des fonctions 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et rappelons qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé pour la norme uniforme $\| \cdot \|_{\infty}$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| (= \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|).$$

L'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Le théorème de Fejér assure que ce sous-espace est dense pour la norme uniforme.

Théorème de Weierstrass trigonométrique: L'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$: quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(p_n)_{n \geq 0}$ tels que:

$$\|p_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |p_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, considérons la suite $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de ses sommes de Fejér. Chaque fonction $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n , et par le théorème de Fejér: $\|S_n(f) - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la densité de l'espace des polynômes trigonométriques.

Dém: (i) La preuve du théorème de Weierstrass trigonométrique assure qu'il est possible de diriger la suite de polynômes trigonométriques $(p_n)_{n \geq 0}$ qui convergent uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, de sorte que:

$$\forall n \geq 0, \deg(p_n) \leq n.$$

(ii) Le théorème de Weierstrass trigonométrique est l'équivalent pour les fonctions continues et 2π -périodiques du théorème de Weierstrass pour les fonctions continues sur un segment, qui assure que les fonctions polynômes sont denses parmi les fonctions continues sur un segment pour la norme uniforme.

2. Interprétation hilbertienne des séries de Fourier

Considérons une fonction f 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Dans cette partie, nous introduisons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace des fonctions 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, qui permet d'interpréter les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f comme les projections orthogonales de cette fonction sur des sous-espaces des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ de degré

inférieur ou égal à n . Cette interprétation permet d'établir la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ vers la fonction f , puis la formule de Parseval pour les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, et complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.

a. Structure préhilbertienne des espaces $E_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Commençons par rappeler la définition d'un produit scalaire réel ou complexe.

Def: Soit E , un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Une application $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ est un produit scalaire réel ou complexe sur l'espace vectoriel E si:

$$(i) \forall x \in E, \forall (y, y') \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \langle x, \lambda y + y' \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle.$$

$$(ii) \forall (x, x') \in E^2, \forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle.$$

$$(iii) \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

$$(iv) \forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0.$$

$$(v) \forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$ est appelé espace préhilbertien réel ou complexe.

Ex: (i) Soit $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$. L'application $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^N$.

(ii) Soit $\forall (x, y) \in (\mathbb{C}^N)^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \overline{y_i}$. L'application $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.

Rem: (i) Une application $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ qui satisfait les propriétés (i) et (ii) de la définition d'une norme est dite bilinéaire dans le cas réel, sesquilinéaire dans le cas complexe. Elle est dite symétrique lorsqu'elle satisfait la propriété (iii), positive quand elle vérifie la propriété (iv), et définie lorsqu'elle satisfait la propriété (v).

(ii) Dans le cas réel, un espace préhilbertien réel est aussi appelé espace euclidien.

(iii) La convention d'imposer la conjugaison sur la deuxième variable du produit

scalaire complexe est arbitraire. Il est permis de l'imposer sur la première variable.
 Dans la suite, nous nous en tiendrons néanmoins à la convention ci-dessus.

Def: Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$.

Considérons l'application $\| \cdot \|$ définie par:

$$\forall x \in E, \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

L'application $\| \cdot \|$ est une norme sur l'espace vectoriel E appelé norme euclidienne ou hilbertienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle$.

Dém: (i) Comme $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$, l'application $\| \cdot \|$ est bien définie sur E et à valeurs positives.

(ii) Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$; $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = (|\lambda|^2 \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|$,
 et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$; comme $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\| \cdot \|$ est bien une norme sur E .

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle$ sur $\mathbb{R}^N$.

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{C}^N, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; $\| \cdot \|$ est la norme hermitienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle$ sur $\mathbb{C}^N$.

Introduisons maintenant la structure préhilbertienne des espaces de fonctions 2π -périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Def: Considérons l'application $\langle, \rangle_2$ définie par:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

L'application $\langle, \rangle_2$ est un produit scalaire réel ou complexe sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, qui est donc un espace préhilbertien réel ou complexe pour ce produit scalaire.

Dém: (i) Comme f et g sont continues sur $(-\pi, \pi)$, la fonction $f \overline{g}$ est aussi continue sur $(-\pi, \pi)$, de sorte que son intégrale est bien définie, et l'application $\langle, \rangle_2$ est aussi bien définie.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, (f_1, f_2) \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$ et $(g_1, g_2) \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2$. Par linéarité de l'intégrale, $\langle \lambda f_1 + f_2, g_2 \rangle_2 = \lambda \langle f_1, g_2 \rangle_2 + \langle f_2, g_2 \rangle_2$, et $\langle f_1,$

$\lambda g_1 + g_2 \rangle_2 = \lambda \langle f_1, g_1 \rangle_2 + \langle f_1, g_2 \rangle_2$; de plus, $\langle f_1, g_1 \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \overline{g_1(x)} dx = \langle g_1, f_1 \rangle_2$, et $\langle f_1, f_1 \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x)|^2 dx$; enfin, si $\langle f_1, f_1 \rangle_2 = 0$, alors par continuité de la fonction f_1 , $\forall x \in [\pi, \pi]$, $f_1(x) = 0$, d'où par 2π -périodicité, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 0 \Rightarrow \langle, \rangle_2$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Cor. Soit $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. L'application $\| \cdot \|_2$ est bien définie sur $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et il s'agit de la norme euclidienne ou hermitienne associée au produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle_2$.

Dém. Par définition du produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle_2$ et de la norme euclidienne ou hermitienne associée.

Rappelons que les fonctions $(f_k)_{k \geq 0}$, $(g_k)_{k \geq 1}$ et $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall k \geq 0, f_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \geq 1, g_k(x) = \sin(kx), \\ \forall k \in \mathbb{Z}, e_k(x) = e^{ikx}. \end{cases}$$

Ces fonctions forment (à des coefficients multiplicatifs près) des familles orthonomées pour le produit scalaire $\langle, \rangle_2$.

Chm. (i) La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonomée pour le produit scalaire $\langle, \rangle_2$.

(ii) La famille $(f_0, (\sqrt{2} f_k)_{k \geq 1}, (\sqrt{2} g_k)_{k \geq 1})$ est orthonomée pour le produit scalaire $\langle, \rangle_2$.

Dém. Ces propriétés résultent des calculs effectués dans la partie sur les polynômes trigonométriques.

Comme ces familles sont des bases de l'espace des polynômes trigonométriques, ce sont des bases orthonomées de cet espace.

Cor. (i) Les familles $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(f_0, (\sqrt{2} f_k)_{k \geq 1}, (\sqrt{2} g_k)_{k \geq 1})$ sont des bases orthonomées pour le produit scalaire $\langle, \rangle_2$ des espaces $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Soit $N \geq 0$. Les familles $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ et $(f_0, (\sqrt{2} f_k)_{1 \leq k \leq N}, (\sqrt{2} g_k)_{1 \leq k \leq N})$ sont des bases orthonomées pour le produit scalaire $\langle, \rangle_2$ des espaces $\mathcal{P}_{2\pi}^N(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém: Ces propriétés résultent du théorème précédent et des résultats établis dans la partie sur les polynômes trigonométriques.

L'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est de plus dense dans l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme euclidienne ou hermitienne $\| \cdot \|_2$. Cette propriété découle du fait que cette norme est contrôlée par la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$.

Lem: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Alors:

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

Dém: Par définition: $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \frac{2\pi}{2\pi} \|f\|_\infty^2 \leq \|f\|_\infty^2$, d'où l'inégalité.

Dém: Les normes $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Ex: Pour $n \geq 1$, considérons la fonction 2π -périodique $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f_n(x) = 0$ si $-\pi \leq x \leq -\frac{1}{2n}$, $(n(2n|x+1|))^{\frac{1}{2}}$ si $-\frac{1}{2n} \leq x \leq 0$, $(n(2-2n|x|))^{\frac{1}{2}}$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$, 0 si $\frac{1}{2n} \leq x \leq \pi$. La fonction f_n est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, avec: $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, d'où: $\|f_n\|_\infty = 2\sqrt{\pi n} \|f_n\|_2$; en particulier, il n'existe pas de nombre $C \geq 0$ tel que: $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$.

Cor: L'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour la norme $\| \cdot \|_2$: quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_{n \geq 0}$, avec $\forall n \geq 0$, $d(f_n) \leq n$, tels que:

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém: Par le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe une suite de polynômes trigonométriques f_n , avec $d(f_n) \leq n$, tels que: $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; par le lemme précédent, $\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

L'application $\| \cdot \|_2$ n'est pas une norme sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi-m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$: cette application est bien définie sur cet espace, reste homogène de degré 1, satisfait toujours l'inégalité triangulaire, mais il existe des fonctions f non nulles de $\mathcal{C}_{2\pi-m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telles que

$$\|f\|_2 = 0.$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = 1, \text{ si } x = 0, 0 \text{ sinon.}$$

La fonction f est bien définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec $\|f\|_2 = 0$, mais elle n'est pas identiquement nulle.

Par contre, l'espace des polynômes trigonométriques $P_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ reste dense dans l'espace $\mathcal{E}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ au sens suivant.

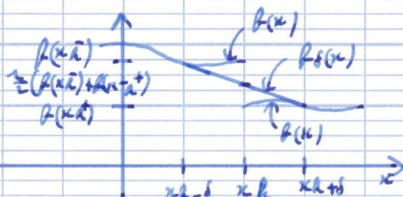
Thm: Soit $f \in \mathcal{E}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Il existe une suite de polynômes trigonométriques

$$(f_n)_{n \geq 0}, \text{ avec : } \forall n \geq 0, d^0(f_n) \leq n, \text{ tels que:}$$

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém: (i) Considérons une subdivision $x_0 = -\pi \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = \pi$ du segment $(-\pi, \pi]$

telle que la fonction f se prolonge par continuité à chacun des segments $(x_h, x_{h+1}]$ pour $0 \leq h \leq n-1$; pour $0 < \delta < \frac{1}{2} \min_{0 \leq h \leq n-1} \{x_{h+1} - x_h\}$, introduisons la fonction 2π -périodique et continue f_δ définie suivant le principe:



par construction: $\|f_\delta - f\|_2 \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} 0$; pour $p \geq 1$ fixé, il existe donc une fonction $\tilde{f}_p \in \mathcal{E}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que: $\|\tilde{f}_p - f\|_2 \leq \frac{1}{2^p}$.

(ii) Par le corollaire précédent, il existe un polynôme trigonométrique g_p tel que

$$\|g_p - \tilde{f}_p\|_2 \leq \frac{1}{2^p} \Rightarrow \|g_p - f\|_2 \leq \frac{1}{2^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0. \text{ Considérons alors la suite}$$

$(d_p)_{p \geq 1}$ des degrés des polynômes trigonométriques g_p ; soit il existe $d \geq 1$ tel

que $\forall p \geq 1, d_p \leq d$; il suffit alors de poser $\forall n \geq 0, f_n = 1$ si $n \leq d$,

g_{n-d} sinon, pour déterminer une suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_{n \geq 0}$

tels que $\forall n \geq 0, d^0(f_n) \leq n$, et $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; soit qu'il y ait au contraire,

la suite $(d_p)_{p \geq 1}$ peut être supposée strictement croissante et de limite $+\infty$;

dans ce cas, posons $\forall n \geq 0, f_n = 1$ si $n \leq d_p, g_p$ si $d_p \leq n \leq$

d_{p+1} ; la suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_{n \geq 0}$ satisfait alors:

$$\forall n \geq 0, d^0(f_n) \leq n, \text{ et } \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Rem: Ce résultat de densité de l'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ s'étend au cadre plus général de l'espace de Lebesgue:

$$\mathcal{L}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est mesurable et } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}, \text{ avec } \|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Cet espace contient l'espace $\mathcal{C}_{2\pi-m}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, et l'application $\|\cdot\|_2$ redéfinit une norme sur cet espace (lorsque l'égalité presque partout remplace l'égalité en tout point), pour laquelle, quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_{n \geq 0}$, avec $\forall n \geq 0, \deg(f_n) \leq n$, tels que:

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

b. Interprétation des coefficients de Fourier et des sommes partielles de la série de Fourier

Considérons une fonction f 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, et rappelons que les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, $(g_n)_{n \geq 1}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall n \geq 0, & f_n(x) = \cos(nx), \\ \forall n \geq 1, & g_n(x) = \sin(nx), \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & e_n(x) = e^{inx}. \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier de la fonction f s'interprètent comme des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ de cette fonction avec les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, $(g_n)_{n \geq 1}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f sont dans ce cadre les projections orthogonales de cette fonction sur les sous-espaces $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n .

Req: (i) $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \langle f, e_n \rangle_2$.

(ii) $a_0(f) = \langle f, f_0 \rangle_2$, et $\forall n \geq 1, a_n(f) = \sqrt{2} \langle f, \sqrt{2} f_n \rangle_2$ et $b_n(f) = \sqrt{2} \langle f, \sqrt{2} g_n \rangle_2$.

Dém: Par définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Ex: Soit $n \geq 0$. Considérons la somme partielle $S_n(f)$ d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f . Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle_2 e_k(x) = \langle f, f_0 \rangle_2 f_0(x) + \sum_{k=1}^n (\langle f, \sqrt{2} f_k \rangle_2 \sqrt{2} f_k(x) + \langle f, \sqrt{2} g_k \rangle_2 \sqrt{2} g_k(x)).$$

$$+ \langle f, \sqrt{2} g_n \rangle_2 \sqrt{2} g_n(x)).$$

Dém: Ces formules résultent de la définition de la fonction $S_n(f)$ par l'expression :
 $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{h=1}^n (a_h(f) \cos(hx) + b_h(f) \sin(hx)) = \sum_{h=-n}^n c_h(f) e^{ihx},$
 et de la propriété précédente.

Chm: Soit $n \geq 0$. La somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de la fonction f est la projection orthogonale de cette fonction sur le sous-espace $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n .

Dém: (i) Comme $S_n(f) = \sum_{h=-n}^n \langle f, e_h \rangle_2 e_h$, la fonction $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n .

(ii) Si $g = \sum_{h=-n}^n a_h e_h$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n , alors, $\langle g, S_n(f) - f \rangle_2 = \sum_{h=-n}^n a_h [\langle e_h, S_n(f) \rangle_2 - \langle e_h, f \rangle_2]$, or $\langle e_h, S_n(f) \rangle_2 = \sum_{k=-n}^n \overline{\langle f, e_k \rangle_2} \langle e_k, e_h \rangle_2 = \overline{\langle f, e_h \rangle_2} = \langle e_h, f \rangle_2$, puisque la famille $(e_h)_{h \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.
 $\Rightarrow \langle g, S_n(f) - f \rangle_2 = 0 \Rightarrow S_n(f) - f$ est orthogonale à $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$
 $\Rightarrow S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$, sa projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{P}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est égale à: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{h=1}^n \frac{2((-1)^h - 1)}{\pi h^2} \cos(hx).$$

Ex (Inégalité de Bessel): Soit $n \geq 0$. Alors:

$$|a_0(f)|^2 + \sum_{h=1}^n (|a_h(f)|^2 + |b_h(f)|^2) = \sum_{h=-n}^n |c_h(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Dém: Soit $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{h=1}^n (a_h(f) \cos(hx) + b_h(f) \sin(hx)) = \sum_{h=-n}^n c_h(f) e^{ihx}$
 Comme les fonctions $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ sont orthogonales par le théorème précédent, le théorème de Pythagore assure que: $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$
 $\geq \|S_n(f)\|_2^2$; sachant que $\|S_n(f)\|_2^2 = |a_0(f)|^2 + \sum_{h=1}^n (|a_h(f)|^2 + |b_h(f)|^2)$
 $= \sum_{h=-n}^n |c_h(f)|^2$, cette inégalité s'écrit: $|a_0(f)|^2 + \sum_{h=1}^n (|a_h(f)|^2 + |b_h(f)|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et ses coefficients de Fourier satisfont: $\forall n \geq 0, \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{3}$.

Dém: La preuve de Parseval que nous allons maintenant établir assure que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité, qui reste de plus vraie pour une fonction 2π -périodique seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

c. Formule de Parseval et Théorème de convergence en moyenne quadratique

Considérons une fonction f 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, et complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de cette fonction continuent à satisfaire l'inégalité de Bessel.

Prop (Inégalité de Bessel): Soit $n \geq 0$. La somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de la fonction f satisfait:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(kx)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

En particulier, les coefficients de Fourier de la fonction f satisfont:

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Dém: La preuve est identique à celle de l'inégalité de Bessel dans le cas où la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Si $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$, alors: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(f)(x)) \overline{S_n(f)(x)} dx$; sachant que $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{S_n(f)(x)} dx = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 2 \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$, et $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f)(x) \overline{S_n(f)(x)} dx = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n \frac{1}{\pi} c_k(f) \overline{c_l(f)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx = 2 \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx$ enfin, $|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, -1 \text{ sinon.}$$

La fonction f est bien définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et ses coefficients de Fourier $c_n(f) = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{i\pi n}$ sinon, satisfont : $\forall n \geq 0, \frac{1}{\pi^2} \sum_{h=0}^n \frac{1}{(2h+1)^2} \leq 1$.

Phénomène de convergence en moyenne quadratique : Les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f satisfont :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Lorsque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, cette convergence s'écrit aussi :

$$\|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dém. : Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons qu'il existe un polynôme trigonométrique g tel

que : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2$; pour $n \geq 0$, par l'inégalité

$$\begin{aligned} \text{de Cauchy-Schwarz, } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x) - f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x) - S_n(g)(x) + g(x) - f(x) + S_n(g)(x) - g(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|S_n(f)(x) - S_n(g)(x)|^2 + |g(x) - f(x)|^2 + |S_n(g)(x) - g(x)|^2 + 2\operatorname{Re}[(S_n(f)(x) - S_n(g)(x)) \\ &\quad (g(x) - f(x)) + (S_n(f)(x) - S_n(g)(x))(S_n(g)(x) - g(x)) + (g(x) - f(x))(S_n(g)(x) - g(x))]) dx \\ &\leq \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|S_n(f) - S_n(g)(x)|^2 + |g(x) - f(x)|^2 + |S_n(g)(x) - g(x)|^2) dx \\ \text{comme } g \text{ est un polynôme trigonométrique, il existe } \nu \geq 0 \text{ tel que : } \forall n \geq \nu, \\ S_n(g) &= g, \text{ d'où par l'inégalité de Bessel, } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x) - f(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{3}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 dx \leq 6\varepsilon^2; \text{ autrement dit, } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x) - f(x)|^2 dx \\ & (= \|S_n(f) - f\|_2^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Dém. : Le théorème de convergence en moyenne quadratique fournit donc un exemple explicite de suite de polynômes trigonométriques, la suite des sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ qui converge vers la fonction f au sens de la norme euclidienne ou hermitienne $\|\cdot\|_2$. Cette propriété est liée au fait que les sommes partielles $S_n(f)$ sont les projections orthogonales de la fonction f sur les sous-espaces $\mathcal{D}_{2\pi}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, soit les meilleures approximations au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ de la fonction f dans ces espaces.

Cor (Formule de Parseval) : Considérons les coefficients de Fourier réels

$(a_n(f))_{n \geq 0}$ et $(b_n(f))_{n \geq 1}$, et complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, de la fonction f 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

et $\sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ sont convergentes, et elles satisfont:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Dém: Soit $n \geq 0$. La preuve de l'inégalité de Bessel assure que: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx$, d'où par le
 théorème de convergence en moyenne quadratique, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx \rightarrow$
 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$; sachant que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(x)|^2 dx = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 =$
 $|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et
 $\sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ sont convergentes, et leurs sommes sont données
 par la formule de Parseval.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

La formule de Parseval pour cette fonction assure que: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Dém: (i) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
 la formule de Parseval s'écrit:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx.$$

(ii) La formule de Parseval est un moyen simple d'obtenir la valeur de certaines séries numériques.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, -1 \text{ sinon.}$$

La formule de Parseval pour cette fonction assure que: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

La formule de Parseval permet d'établir l'injectivité des coefficients de Fourier réels ou complexes.

Prop: (i) Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$. Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

(ii) Supposons seulement que: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$. Alors la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$,
 sauf possiblement en ses points de discontinuité.

Dém: (i) S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x_0) \neq 0$, alors, par continuité, il existe deux nombres $\delta > 0$
 et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $|f(x)| \geq \delta$; par 2π -périodicité, il existe

deux nombres $-\pi < a < b < \pi$ tels que $\forall x \in (a, b), |f(x)| \geq \delta \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \delta^2(b-a) \neq 0$, d'où la propriété (i) par contradiction.

(ii) Comme la fonction f est C^0 par morceaux sur $(-\pi, \pi]$, il existe une subdivision $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \pi$ telle que f se prolonge en une fonction continue sur chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ pour $0 \leq j \leq N-1$; par la formule de Charles, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|^2 dx$; si $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$, alors, $\forall 0 \leq j \leq N-1, \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|^2 dx = 0$, d'où par la preuve de la propriété (i), $\forall x \in]x_j, x_{j+1}[, f(x) = 0 \Rightarrow f$ est nulle sur $(-\pi, \pi)$, sauf possiblement en ses points de discontinuité; cette propriété s'étend à $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité.

Lém: Supposons qu'une fonction g 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, satisfait:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g), \\ \text{ou} \begin{cases} \forall n \geq 0, a_n(f) = a_n(g), \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(f) = b_n(g). \end{cases} \end{cases}$$

Il existe un sous-ensemble fini ou vide I de $(-\pi, \pi]$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (I + 2\pi\mathbb{Z}), f(x) = g(x).$$

L'ensemble I est vide lorsque les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

Dém: Par la formule de Parseval, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f-g)|^2$, d'où par linéarité des coefficients de Fourier, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f-g)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2 = 0$, de sorte que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$; par la propriété précédente, il existe un sous-ensemble fini ou vide (lorsque f et g sont par exemple continues sur $\mathbb{R}$) I de $(-\pi, \pi]$ tel que: $\forall x \in (-\pi, \pi) \setminus I, f(x) = g(x)$; par 2π -périodicité, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (I + 2\pi\mathbb{Z}), f(x) = g(x)$.

Ex: Soit f , une fonction 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0, \\ \text{ou} \begin{cases} \forall n \geq 0, a_n(f) = 0, \text{ et } \forall n \geq 1, b_n(f) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

La fonction f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

La formule de Parseval permet enfin de démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue qui décrit le comportement asymptotique des coefficients de Fourier réels ou complexes de la fonction f .

Lemme de Riemann - Lebesgue: Les coefficients de Fourier de la fonction f satisfont :

$$a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad b_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ et } c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Dém: Par la formule de Parseval, les séries $\sum_{n \geq 0} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$ et $\sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ sont convergentes, d'où $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui conduit aux convergences ci-dessus.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, \quad -1 \text{ sinon.}$$

alors: $\forall n \in \mathbb{Z}, c_{2n}(f) = 0$, et $c_{2n+1}(f) = \frac{2}{i\pi(2n+1)}$, d'où $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$; de même, $\forall n \geq 0, a_n(f) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n}$, et $b_n(f) = 0$, d'où $a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $b_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Thém: Le lemme de Riemann - Lebesgue est un outil essentiel dans la preuve du théorème de Dirichlet qui donne des conditions suffisantes pour la convergence ponctuelle des séries de Fourier.

3. Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Considérons une fonction f 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Le théorème de convergence en moyenne quadratique assure que les sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f convergent vers cette fonction au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, lorsque la fonction f est continue. Cette convergence ne garantit pas une convergence ponctuelle de ces sommes partielles en tout point de $\mathbb{R}$. Les critères de convergence uniforme et le théorème de Dirichlet que nous allons maintenant mentionner donnent des conditions de régularité sur la fonction f pour que cette convergence ponctuelle ait lieu.

a. Critère de convergence uniforme

Le critère de convergence uniforme des séries de Fourier repose aussi sur la formule de Parseval.

Théorème de convergence uniforme: Supposons que:

- (i) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La série de Fourier de la fonction f est normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

Dém: (i) Considérons la dérivée f' de la fonction f . Comme $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = in c_n(f)$, et f' est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, par la formule de Parseval, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 (= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2)$ est convergente; sachant que $\forall n \in \mathbb{Z}^*, |c_n(f)| = \frac{1}{n} |c_n(f')| \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{n^2}{2} |c_n(f')|^2$, et que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n \neq 0} |c_n(f)|$ est convergente, d'où la convergence normale, donc uniforme, de la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$; par convergence uniforme, la somme S est continue sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(S) = c_n(f)$, d'où par injectivité des coefficients de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$; par égalité des séries de Fourier réelles et complexes, les résultats restent valables pour la série de Fourier réelle.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = 0$, $c_{2n+2}(f) = -\frac{1}{\pi(2n+2)^2}$, ainsi que $c_0(f) = \frac{\pi}{2}$, d'où: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n+2)x)}{(2n+2)^2}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+2)x}}{(2n+2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2n+2)x)}{(2n+2)^2}.$$

Dém: Lorsque la série de Fourier est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, la somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de la fonction f ne peut donc converger uniformément vers cette fonction que si elle est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Théorème de Dirichlet

En général, la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique, même continue, sur

$\mathbb{R}$ n'est pas convergente en tout point de $\mathbb{R}$.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin((2n^3+2)\frac{x}{2})}{n^2}.$$

La fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$, avec: $a_0(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2(2p^3+2)}$, et $\forall n \neq 0$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=2}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{p^2} \frac{\sin((2p^3+2)\frac{x}{2})}{p^2} dx$, et $b_n(f) = 0$. Mais la série $\sum_{n \geq 0} a_n(f)$ est divergente.

Le théorème de convergence uniforme assure qu'une condition de régularité suffit à garantir la convergence de la série de Fourier vers la fonction associée. Le théorème de Dirichlet fournit une condition similaire dans le cas des fonctions continues par morceaux. Le problème est alors la question de la valeur de la série de Fourier aux points de discontinuité de la fonction f . Afin de clarifier cette valeur, il est nécessaire d'introduire la régularité de Dirichlet de cette fonction.

Def: La régularité de Dirichlet $\tilde{f}$ de la fonction f est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \right).$$

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ sinon.}$$

La régularité de Dirichlet $\tilde{f}$ de la fonction f est la fonction 2π -périodique définie par: $\forall x \in]-\pi, \pi], \tilde{f}(x) = 0$ si $-\pi \leq x \leq 0$, $\frac{1}{2}$ si $x = 0$, 1 si $0 < x < \pi$, et $\frac{1}{2}$ si $x = \pi$.

Prop: Supposons que la fonction f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La régularité de Dirichlet $\tilde{f}$ est bien définie, 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x^-} \tilde{f}(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} \tilde{f}(y) \right).$$

Dém: Considérons une subdivision $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tel que la fonction f se prolonge par continuité à chacun des segments $[x_i, x_{i+1}]$. La régularité $\tilde{f}$ est alors bien définie sur tous les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (et continue sur ces intervalles; comme $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, elle se prolonge de plus par continuité aux segments $[x_i, x_{i+1}]$; pour $0 < i < n$, la fonction $\tilde{f}$ est aussi définie en x_i par: $\tilde{f}(x_i) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x_i^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x_i^+} f(y) \right)$; en x_0 et en x_n , elle est définie par 2π -périodicité de f par: $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(x_n) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x_0^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x_0^+} f(y) \right)$.

$\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$; par construction, la fonction $\tilde{f}$ est 2π -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait: $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow x^-} \tilde{f}(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} \tilde{f}(y) \right)$.

Théorème: Lorsque la fonction f est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$, sa régularisée de Dirichlet $\tilde{f}$ est égale à la fonction f .

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

La régularisée de Dirichlet de la fonction f est égale à: $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Le théorème de Dirichlet repose sur une réécriture des sommes partielles $(S_n(f))_{n \geq 0}$ de la série de Fourier de la fonction f à l'aide des noyaux de Dirichlet $(D_n)_{n \geq 0}$.

Rappelons que le noyau de Dirichlet D_n est défini pour tout entier $n \geq 0$ par l'expression:

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Le noyau de Dirichlet D_n est un polynôme trigonométrique pair de degré n qui satisfait:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1.$$

La valeur est aussi donnée par la formule:

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

La somme partielle $S_n(f)$ s'écrit en fonction du noyau de Dirichlet de la façon suivante.

Prop: Soit $n \geq 0$. Alors $\tilde{f}$ la régularisée de Dirichlet de la fonction f . Alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tilde{f}(x+y) + \tilde{f}(x-y)}{2} D_n(y) dy.$$

Démon: (i) Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iky} dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy$, d'où par linéarité, $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy$.

(ii) Comme f est égale à $\tilde{f}$, sauf en un nombre au plus fini de points de la segment $[-\pi, \pi]$, $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) D_n(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} \tilde{f}(x-y) D_n(y) dy$; par 2π -périodicité, $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-y) D_n(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\tilde{f}(x-y) D_n(y) + \tilde{f}(x+y) D_n(-y)] dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tilde{f}(x-y) + \tilde{f}(x+y)}{2} D_n(y) dy$, par parité de D_n .

Théorème de Dirichlet: Supposons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et notons $\tilde{f}$ sa régularisée de Dirichlet. La série de Fourier de la fonction f est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme vaut:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = a(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \tilde{f}(x).$$

En particulier, si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = a(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = f(x).$$

Dém.: (i) Sachant que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$, et que le noyau de Dirichlet D_n est pair, $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(x) dx = 1$, d'où par la formule précédente, $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\frac{\tilde{f}(x+y) + \tilde{f}(x-y)}{2} - \tilde{f}(x)) D_n(y) dy$; comme $\forall y \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(y) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}y)}{\sin(\frac{y}{2})} = \cos(ny) + \frac{\cos(\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})} \sin(ny)$, $S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\Psi_n(y) \cos(ny) + \Psi_n(y) \sin(ny)) dy$, où: $\forall y \in \mathbb{R}$, $\Psi_n(y) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x))$ et $\forall y \in]0, \pi]$, $\Psi_n(y) = \frac{1}{2y} (\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)) \frac{y \cos(\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})}$.

(ii) Comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ et Ψ_n sont aussi continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'où par le lemme de Riemann-Lebesgue, $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_n(y) \cos(ny) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(iii) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$; soit donc $y_- < x < y_+$ tels que $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y_-, x]$, respectivement $[x, y_+]$; lorsque $y < \min\{x - y_-, y_+ - x\}$, $\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}_+(x+y) - \tilde{f}_+(x) + \tilde{f}_-(x-y) - \tilde{f}_-(x) = \int_0^y \Psi'_+(x+t) dt + \int_0^y \Psi'_-(x-t) dt \Rightarrow \frac{1}{y} [\tilde{f}_+(x+y) - \tilde{f}_+(x) + \tilde{f}_-(x-y) - \tilde{f}_-(x)] \xrightarrow{y \rightarrow 0} \tilde{f}'_+(x) - \tilde{f}'_-(x) \Rightarrow$ la fonction $y \mapsto \frac{1}{y} [\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)]$ se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $(0, \pi]$; comme la fonction $y \mapsto y \frac{\cos(\frac{y}{2})}{\sin(\frac{y}{2})}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, \pi]$, la fonction Ψ_n est bien définie et continue par morceaux sur $(0, \pi]$, et il est possible de la prolonger en une fonction 2π -périodique, impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$; par le lemme de Riemann-Lebesgue, $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_n(y) \sin(ny) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la convergence $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x)$; comme $\tilde{f} = f$ lorsque f est continue, nous obtenons $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ dans ce cas.

Ex.: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ sinon.}$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{i\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z}, \frac{1}{2} \text{ sinon.}$$

- Rem: (i) En particulier, la somme de la série de Fourier de la fonction f n'est pas en générale égale à cette fonction, lorsque cette série n'est que simplement convergente.
(ii) Les théorèmes de Dirichlet permet de calculer la valeur de nombreuses séries numériques.

Ex: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction 2π -périodique définie par:

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, -1 \text{ sinon.}$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{i\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, 0 sinon. En particulier, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

- (iii) Soit $T > 0$. Lorsque la fonction f est T -périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet conduit à la formule:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{i\pi n x}{T}} = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right).$$