

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Donner la formule des coefficients de Fourier $(c_n(f'))_{n \in \mathbb{Z}}$ de la dérivée f' d'une fonction f 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Énoncer la formule de polarisation qui relie le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ d'un espace vectoriel réel E à la norme euclidienne $\| \cdot \|_E$ associée.
3. Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme $\| \cdot \|$. Donner la définition d'une suite de Cauchy $(u_n)_{n \geq 0}$ de E .
4. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert réel H . Donner la formule du bi-orthogonal $(F^\perp)^\perp$ du sous-espace F en fonction de ce sous-espace.

Exercice 1. (8 points)

Soit $0 < \alpha \leq \pi$. Considérons la fonction 2π -périodique f définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\alpha} & \text{si } |x| \leq \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1.a. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
- b. La fonction f est-elle impaire sur $\mathbb{R}$? Est-elle paire sur $\mathbb{R}$?
- c. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$?
- 2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n \geq 1}$ de la fonction f .
- b. Calculer le coefficient de Fourier $a_0(f)$ de la fonction f .
- c. Vérifier que les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \geq 1}$ de la fonction f sont égaux à

$$\forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{n^2 \alpha \pi} (1 - \cos(n\alpha)).$$

- 3.a. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4}.$$

- b. Déterminer la valeur de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha))^2}{n^4}.$$

- c. En déduire la valeur de la série

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 2. (8 points)

Soit H l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n^2 < +\infty.$$

1.a. Vérifier que H est un sous-espace de l'espace des suites réelles de carré sommable $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Soit

$$\forall (a, b) \in H^2, \langle a, b \rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n b_n.$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est bien définie, et qu'il s'agit d'un produit scalaire réel sur l'espace H .

2.a. Soit $(a^{(p)})_{p \geq 0}$ une suite de Cauchy de H pour la norme $\| \cdot \|_H$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Posons

$$\forall p \geq 0, \forall n \geq 0, u_n^{(p)} = 2^{\frac{n}{2}} a_n^{(p)}.$$

Vérifier que $(u^{(p)})_{p \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. En déduire que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

3.a. Posons

$$\mathcal{B} = \{a \in H \text{ telle que } \forall n \geq 0, |a_n| \leq 1\}.$$

Vérifier que le sous-ensemble $\mathcal{B}$ est non vide et convexe.

b. Soit

$$\forall a \in H, \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \geq 0} |a_n|.$$

Vérifier que

$$\forall a \in H, \|a\|_{\ell^\infty} \leq \|a\|_H.$$

c. En déduire que $\mathcal{B}$ est fermé.

d. Étant donnée une suite $a \in H$, posons

$$\forall n \geq 0, b_n = \begin{cases} a_n, & \text{si } |a_n| \leq 1, \\ \frac{a_n}{|a_n|}, & \text{si } |a_n| > 1. \end{cases}$$

Vérifier que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ appartient à $\mathcal{B}$.

e. Soit $a \in H$. En déduire l'expression de la projection de la suite a sur le sous-ensemble convexe fermé non vide $\mathcal{B}$.