

Chapitre II : Espaces de HilbertIntroduction

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les concepts et les outils de la géométrie euclidienne à un espace vectoriel réel ou complexe quelconque. En pratique, il s'agit d'abord de définir un produit scalaire réel ou complexe dans un cadre plus général, et d'énoncer les propriétés intrinsèques de ce produit scalaire. Muni de ce produit scalaire, un espace vectoriel devient un espace préhilbertien réel ou complexe.

En dimension infinie, la seule introduction d'un produit scalaire ne garantit pas la conservation des propriétés les plus usuelles de la géométrie euclidienne. Il est aussi nécessaire de supposer une propriété analytique naturelle en dimension finie : la complétude. Un espace préhilbertien complet pour la norme euclidienne ou hermitienne naturellement associée à son produit scalaire est appelé espace de Hilbert réel ou complexe.

Dans le cadre des espaces de Hilbert, il est possible de généraliser les notions bien connues de projection orthogonale, sous-espace orthogonal, bases orthonormées... En dimension infinie, cette généralisation conduit au développement en série de tout vecteur dans une base dite hilbertienne. Ce développement est très similaire à celui d'une fonction périodique en série de Fourier, ce qui permet de retrouver et d'étendre des résultats classiques sur les séries de Fourier tels que l'inégalité de Bessel ou la formule de Parseval.

I Produits scalaires et espaces de Hilbert

2. Espace quaternions réels ou complexes

Considérons un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E et un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel F , et observons que F est aussi naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

a. Définitions et exemples

Commençons par rappeler la notion de forme bilinéaire sur E et de forme sesquilinéaire sur F .

Déf: (i) Une application $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E si:

$$\forall (x, x', y, y') \in E^4, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi(\lambda x + y, \lambda' x' + y') = \lambda \lambda' \Phi(x, x') + \lambda \Phi(y, x') + \lambda' \Phi(x, y') + \Phi(y, y').$$

(ii) Une application $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur F si:

$$\forall (x, x', y, y') \in F^4, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2, \quad \Phi(\lambda x + y, \lambda' x' + y') = \lambda \overline{\lambda'} \Phi(x, x') + \lambda \overline{\lambda'} \Phi(x, y') + \lambda' \overline{\lambda} \Phi(y, x') + \Phi(y, y').$$

Ex: Soit $n \geq 1$, posons: $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \quad \Phi_1(A, B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$, et $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2, \quad \Phi_2(A, B) = \text{tr}(A) \overline{\text{tr}(B)}$. Les applications Φ_1 et Φ_2 sont des formes bilinéaires sur $M_n(\mathbb{R})$, respectivement sesquilinéaires sur $M_n(\mathbb{C})$.

Rem: (i) Une forme bilinéaire est donc linéaire par rapport à chacune de ses variables, tandis qu'une forme sesquilinéaire est linéaire par rapport à sa première variable, mais antilinéaire par rapport à sa seconde variable.

(ii) La linéarité de la seconde variable pour la propriété d'antilinéarité est subalterne. Tout ce qui suit reste vrai pour la linéarité de la première variable (à des permutations de variables près dans certaines formules).

(iii) Observons qu'une forme sesquilinéaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel F devient une forme bilinéaire sur cet espace lorsque $\mathbb{C}$ est restreint à sa structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Introduisons maintenant la notion de produit scalaire réel ou complexe.

Def: (i) Une application $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire réel sur E si:

- et
- (i) Φ est une forme bilinéaire sur E .
 - (ii) Φ est symétrique: $\forall (x, y) \in E^2, \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.
 - (iii) Φ est positif: $\forall x \in E, \Phi(x, x) \geq 0$.
 - (iv) Φ est défini: $\forall x \in E, \Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) Une application $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire complexe sur E si:

- et
- (i) Φ est une forme sesquilinéaire sur E .
 - (ii) Φ est hermitienne: $\forall (x, y) \in E^2, \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$.
 - (iii) Φ est positif: $\forall x \in E, \Phi(x, x) \geq 0$.
 - (iv) Φ est défini: $\forall x \in E, \Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ex: (i) Soit $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Φ est un produit scalaire réel sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Soit $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2, \Phi(A, B) = \text{tr}(A^t \bar{B})$. Φ est un produit scalaire complexe sur $M_n(\mathbb{C})$.

(iii) Soit $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})^2, \Phi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Φ est un produit scalaire réel sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

Rem: Lorsque Φ est hermitienne sur E , nous vérifions que: $\forall x \in E, \Phi(x, x) = \overline{\Phi(x, x)}$, ce qui garantit que $\Phi(x, x)$ est un nombre réel. En particulier, il est possible de déterminer si ce nombre est positif ou non.

Dans la suite, le produit scalaire (qu'il soit réel ou complexe) sera noté $\langle, \rangle$ (avec un possible indice qui caractérisera son expression exacte ou l'espace sur lequel il est défini).

Def: (i) Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle_E$ est appelé espace préhilbertien réel.

(ii) Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle_E$ est appelé espace préhilbertien complexe.

Ex: (i) Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}^n$) sont des espaces préhilbertiens réels (complexes) pour le produit scalaire: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ($(\mathbb{C}^n)^2$), $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ $= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(ii) Les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ ($M_n(\mathbb{C})$) sont des espaces préhilbertiens réels (complexes) pour le produit scalaire: $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ ($M_n(\mathbb{C})^2$), $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}}$ $= \text{tr}(A^t B)$.

(iii) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire: $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2$, $\langle f, g \rangle_{\mathbb{R}} = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

2. Propriétés du produit scalaire

afin de définir la norme euclidienne ou hermitienne associée à un produit scalaire réel ou complexe, nous établirons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Cauchy-Schwarz: Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire réel ou complexe sur un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E . Alors:

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si les vecteurs x et y sont liés.

Dém: (i) Considérons le cas où E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (la preuve est identique dans le cas réel); par positivité, $\forall (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $\langle \lambda e^{i\theta} x + y, \lambda e^{i\theta} x + y \rangle \geq 0$, d'où par développement, $\lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda e^{i\theta} \langle x, y \rangle + \lambda e^{-i\theta} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$; comme $\langle, \rangle$ est hermitien, $\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \text{Re}(e^{i\theta} \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \geq 0$; choisissons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Re}(e^{i\theta} \langle x, y \rangle) = |\langle x, y \rangle|$; dans ce cas, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \geq 0 \Rightarrow \Delta = 4[|\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle] \leq 0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

(ii) L'égalité a lieu si $\Delta = 0$, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\langle \lambda e^{i\theta} x + y, \lambda e^{i\theta} x + y \rangle = 0 \Leftrightarrow y = -\lambda e^{i\theta} x \Rightarrow x$ et y sont liés, et la réciproque est vraie.

Ex: (i) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$(ii) \text{ Soit } \forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})^2, \left| \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons alors définir la norme euclidienne ou hermitienne associée à un produit scalaire réel ou complexe.

Def: (i) Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire réel sur E . La norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle$ est définie par:

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

(ii) Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire complexe sur F . La norme hermitienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle$ est définie par:

$$\forall x \in F, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Ex: (i) Soit $\forall x \in \mathbb{C}^N, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. $\| \cdot \|_2$ est la norme hermitienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle_2$ sur $\mathbb{C}^N$.

(ii) Soit $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^t A)}$. $\| \cdot \|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle, \rangle_2$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Thm: Avec cette définition, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire réel ou complexe d'un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E s'écrit:

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

La norme euclidienne ou hermitienne est bien une norme sur l'espace vectoriel associé.

Inégalité triangulaire: Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire réel ou complexe sur un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E , et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne ou hermitienne associée. Alors:

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dém: Par définition, $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$
 d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$
 $\Rightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Blm: Soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne ou hermitienne associée à un produit scalaire.

réel ou complexe sur un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E . L'application $\| \cdot \|$ est une norme sur E ; c'est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui satisfait :

$$\text{et } \begin{cases} \text{(i)} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ \text{(ii)} & \forall (x, y) \in E^2, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \\ \text{(iii)} & \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$$

Défin: Par positivité de la racine carrée, $\| \cdot \|$ est bien défini de E dans $\mathbb{R}_+$ et, par la lemma précédent, satisfait l'inégalité triangulaire; (iii) résulte du fait que le produit scalaire est défini; par l'homogénéité ou sesquilinearité, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall x \in E, \|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Ex: (i) Soit $\forall f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$, $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. L'application $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$. C'est la norme hermitienne associée au produit scalaire complexe: $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})^2$, $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

(ii) Considérons l'espace des suites réelles de carré sommable:

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}.$$

et posons: $\forall u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|u\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. L'application $\| \cdot \|_{\ell^2}$ est une norme sur $\ell^2(\mathbb{R})$. C'est la norme euclidienne associée au produit scalaire réel: $\forall (u, v) \in \ell^2(\mathbb{R})^2$, $\langle u, v \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. (Remarquez que ce produit scalaire est bien défini sur $\ell^2(\mathbb{R})$, puisque:

$$\forall n \geq 0, |u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2), \text{ de sorte que la série } \sum_{n \geq 0} u_n v_n \text{ est absolument convergente, donc convergente, lorsque } u \text{ et } v \text{ appartiennent à } \ell^2(\mathbb{R}).$$

De plus, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2}$ est bien un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$, puisque'elle est bilinéaire, symétrique, et qu'elle satisfait:

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{R}), \langle u, u \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0, \text{ et } \langle u, u \rangle_{\ell^2} = 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, u_n = 0.$$

Nous venons de définir la norme euclidienne ou hermitienne à partir du produit scalaire réel ou complexe. Les formules de polarisation permettent de retrouver la valeur du produit scalaire à partir de plusieurs expressions de la norme.

Formules de polarisation: (i) Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire réel sur E et $\| \cdot \|$, la norme euclidienne associée. Alors:

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

(ii) Soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire complexe sur E et $\| \cdot \|$, la norme hermitienne associée. Alors:

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i (\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)).$$

Dém.: Dans le cas complexe, par bilinéarité, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$, et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + i \langle x, y \rangle + i \langle y, x \rangle + \|y\|^2$, d'où $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i (\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + 2(i \langle x, y \rangle - i \langle y, x \rangle) = 4 \langle x, y \rangle$, d'où la formule de polarisation; la preuve est identique dans le cas réel.

La preuve des formules de polarisation est basée sur l'identité remarquable:

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, & \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \\ \text{ou} & \forall (x, y) \in E^2, & \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2. \end{cases}$$

Cette identité permet de généraliser le théorème de Pythagore à un espace préhilbertien quelconque.

Def.: Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle$. Deux vecteurs x et y de E sont orthogonauxssi:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Ex.: Considérons l'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}([-1, 1]), \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle, \rangle$. Si f et g sont des fonctions paires, respectivement impaires de $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, alors elles sont orthogonales, car: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(-y)g(-y)dy = -\int_{-1}^1 f(y)g(y)dy = -\langle f, g \rangle$, d'où $\langle f, g \rangle = 0$.

Théorème de Pythagore: Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle$.

(i) Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux de E , alors:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) Si G est un espace préhilbertien réel, alors la réciproque est vraie.

Dém: (i) En effet, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(ii) Dans le cas réel, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = 0 \Rightarrow$
 x et y sont orthogonaux.

Rem: Dans le cas où G est un espace préhilbertien complexe, il est nécessaire que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, pour que la réciproque soit vraie.

Ex: Considérons l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire complexe:

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \langle z, z' \rangle = z \bar{z}'$ alors: $\|1+i\|^2 = 2 = \|1\|^2 + \|i\|^2$,
 mais, $\langle 1, i \rangle = -i \neq 0$.

L'identité remarquable précédente conduit aussi à l'identité du parallélogramme.

Identité du parallélogramme: Soit G un espace préhilbertien réel ou complexe muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle$. Alors:

$$\forall (x, y) \in G^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dém: En effet, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Rem: Lorsque un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E ou un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire réel ou complexe, il est facile de définir la norme euclidienne ou hermitienne associée. Lorsque un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel G est muni d'une norme, il est moins évident de déterminer si cette norme est euclidienne ou hermitienne, soit associée à un produit scalaire réel ou complexe sur G . À l'aide des formules de polarisation, il est possible de vérifier qu'une norme est euclidienne ou hermitienne si elle satisfait l'identité du parallélogramme.

Ex: Soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|x, y\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$; comme $\|(1, 1)\|_\infty^2 + \|(1, -1)\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|(1, 0)\|_\infty^2 + \|(0, 1)\|_\infty^2)$, cette norme n'est pas euclidienne.

Lorsqu'un $\mathbb{R}$ -ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel G est muni d'un produit scalaire réel ou complexe, il est naturel de considérer la structure d'espace vectoriel normé associée à la norme euclidienne ou hermitienne pour étudier les propriétés de convergence dans cet espace. Dans ce cadre, une propriété très utile est la continuité du produit scalaire, et de la norme euclidienne ou hermitienne.

Thm: Soit G un $\mathbb{R}$ -ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $\|\cdot\|$, la norme euclidienne ou hermitienne associée.

(i) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pour la norme $\|\cdot\|$).

(ii) La norme $\|\cdot\|$ est continue de G dans $\mathbb{R}_+$ (pour la norme $\|\cdot\|$).

Dém: (i) Soit $(x_0, y_0) \in G^2$; par bilinéarité, $\forall (x, y) \in G^2$, $\langle x, y \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$
 $= \langle x - x_0, y_0 \rangle + \langle x - x_0, y - y_0 \rangle + \langle x_0, y - y_0 \rangle$, d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq \|x - x_0\| (\|y_0\| + \|y - y_0\|)$
 $+ \|x_0\| \|y - y_0\| \Rightarrow \langle x, y \rangle \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \langle x_0, y_0 \rangle$.

(ii) Soit $x_0 \in G$; par l'inégalité triangulaire, $\forall x \in G$, $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$
 $\Rightarrow \|x\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \|x_0\|$.

Une autre propriété très utile afin d'étudier les propriétés de convergence est la complétude, soit la convergence de toute suite de Cauchy de l'espace vectoriel normé G . L'étude de cette propriété conduit à la définition suivante des espaces de Hilbert.

2. Espaces de Hilbert

a. Rappelons sur la notion de complétude

Soit G un $\mathbb{R}$ -ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Def: Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de G . La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy (pour la norme $\|\cdot\|$) si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0$ t.q. $\forall m \geq N, \forall n \geq N, \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$.

Ex: Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de G convergente de limite x , alors, c'est une suite de Cauchy. En effet, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0$ t.q. $\forall n \geq N, \|x_n - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où par l'inégalité triangulaire, $\forall m \geq N, \forall n \geq N, \|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\| \leq \varepsilon$.

Rem: Une suite de Cauchy n'est pas contre pas toujours convergente.

Ex: Soit $\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 1], f_n(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq 1 - 2^{-n}$, $2^{n-1}(x + \frac{1}{2^n})$ si $1 - 2^{-n} \leq x \leq 1$, et 1 si $1 - 2^{-n} \leq x \leq 1$; les fonctions f_n sont bien définies et continues sur $[-1, 1]$; si l'espace $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme euclidienne définie par: $\forall f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, alors: $\forall N \geq 0, \forall m \geq N, \forall n \geq N, \|f_n - f_m\| \leq 2^{-\frac{N-1}{2}}$ (pour $n, m \geq 0$), est une suite de Cauchy pour cette norme; enfin, si $\forall x \in [-1, 1], f_\infty(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq 0$, 1 si $x > 0$, alors: $\int_{-1}^1 |f_n(x) - f_\infty(x)|^2 dx \rightarrow 0$, ce reste que si $(f_n)_{n \geq 0}$ est convergente pour la norme $\|\cdot\|$, alors, sa limite est égale à la fonction f_∞ sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, ce qui est-à-dire de puisque cette fonction ne peut se prolonger par continuité en 0.

Déf: L'espace vectoriel normé G est complet pour la norme $\|\cdot\|$ si toute suite de Cauchy pour cette norme est convergente. Dans ce cas, l'espace G est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$.

Ex: L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est complet pour la valeur absolue $|\cdot|$.

Rem: Il s'agit d'un axiome de la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Thm: Si G est un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors il est complet quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ dont il est muni.

Dém: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de G et $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x_i \in \mathbb{R}, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur G , et par équivalence des normes en dimension finie, il suffit de montrer que G est complet pour cette norme; si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy pour cette norme, alors, les suites $((x_n)_i)_{n \geq 0}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) pour tout $1 \leq i \leq n$, donc sont convergentes de limite $(p_i)_i$; la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est

alors convergente de limite $x_\infty = \sum_{i=2}^{\infty} (x_{i-1})_i \cdot e_i$, d'où la complétude de G .

Rem: En dimension infinie, il existe des espaces vectoriels normés qui ne sont pas complets.

Ex: Considérons l'espace $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne définie par:
 $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, et posons: $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1]$,
 $f_n(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq -2^{-n}$, $2^{n-1} \left(x + \frac{1}{2^n}\right)$ si $-2^{-n} \leq x \leq 2^{-n}$, et 1 si
 $2^{-n} \leq x \leq 1$. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, mais
n'est pas convergente dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, qui n'est donc pas complet.

Il est possible, et utile, d'étendre la notion de complétude aux parties d'un espace de Banach.

Def: Soit X , un sous-ensemble d'un espace de Banach G . Le sous-ensemble X est complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ de X est convergente de limite $x_\infty \in X$.

Ex: Le segment $[-1, 1]$ est un sous-ensemble complet de l'espace de Banach $\mathbb{R}$.
Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $[-1, 1]$, alors c'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, donc il existe un nombre $x_\infty \in \mathbb{R}$ t.q. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_\infty$; comme
 $\forall n \geq 0, -1 \leq x_n \leq 1$, à la limite $n \rightarrow +\infty, -1 \leq x_\infty \leq 1 \Rightarrow [-1, 1]$ est complet.

Rem: Vérifier qu'un sous-ensemble X d'un espace de Banach G est complet consiste ainsi à vérifier que les limites des suites de cet ensemble restent dans cet ensemble.

Thm: Un sous-ensemble X d'un espace de Banach G est complet si X est un sous-ensemble fermé de G .

Dém: $\Rightarrow$ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de X telle qu'il existe $x_\infty \in G$ t.q. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_\infty$; comme
me $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente, elle est de Cauchy, donc il existe $y_\infty \in X$ t.q.
 $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y_\infty \Rightarrow x_\infty = y_\infty \in X \Rightarrow X$ est fermé.
 $\Leftarrow$ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de X ; comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans
 G , il existe $x_\infty \in G$ tel que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_\infty$; comme X est fermé, $x_\infty \in X \Rightarrow$
 X est complet.

Ex: Toute boule fermée d'un espace de Banach est complète.

b. Définition et exemples.

Soit H un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Déf: L'espace préhilbertien réel ou complexe H est un espace de Hilbert si il est complet pour sa norme euclidienne ou hermitienne.

Ex: (i) L'espace $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{C}^N$) muni du produit scalaire canonique: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$ ($(\mathbb{C}^N)^2$), $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \overline{y_i}$, est un espace de Hilbert. Il est en effet de dimension finie, donc complet.

(ii) L'espace $M_N(\mathbb{R})$ ($M_N(\mathbb{C})$) muni du produit scalaire canonique: $\forall (A, B) \in M_N(\mathbb{R})^2$ ($M_N(\mathbb{C})^2$), $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B)$, est un espace de Hilbert. Il est en effet de dimension finie, donc complet.

Rem: (i) Tout espace préhilbertien réel ou complexe de dimension finie est complet, donc est un espace de Hilbert.

(ii) En dimension infinie, il existe des espaces préhilbertiens réels ou complexes qui ne sont pas des espaces de Hilbert.

Ex: Considérons l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par: $\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})^2$, $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.
Preuve: $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$, $f_n(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq -2^{-n}$, $2^{-2+n}(x + 2^{-n})$ si $-2^{-n} \leq x \leq 2^{-n}$, 1 si $2^{-n} \leq x \leq 1$. La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, mais n'est pas convergente dans cet espace, qui n'est donc pas un espace de Hilbert.

En dimension infinie, le prototype des espaces de Hilbert est fourni par l'espace des suites réelles $\ell^2(\mathbb{R})$, ou complexes $\ell^2(\mathbb{C})$.

Def: Les espaces des suites réelles ou complexes de carré sommable

$$\begin{cases} \ell^2(\mathbb{R}) = \{ (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \}, \\ \text{ou } \ell^2(\mathbb{C}) = \{ (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \}, \end{cases}$$

sont des espaces de Hilbert pour les produits scalaires:

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in C^2(\mathbb{R})^2, \langle u, v \rangle_{L^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}, \\ \text{ou } \forall (u, v) \in C^2(\mathbb{D})^2, \langle u, v \rangle_{L^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}. \end{cases}$$

Dém: (i) Dans le cas complexe, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est bien défini sur $C^2(\mathbb{D})^2$ en raison de l'inégalité: $\forall (u, v) \in C^2(\mathbb{D})^2, \forall n \geq 0, |u_n \overline{v_n}| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$. Cette application est alors sesquilineaire, hermitienne, définie et positive, de sorte qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $C^2(\mathbb{D})$.

(ii) Considérons alors une suite de Cauchy $(u^{(p)})_{p \geq 0}$ de $C^2(\mathbb{D})$ (pour la norme hermitienne; $\forall \varepsilon > 0, \exists p \geq 0 \text{ t.q. } \forall p \geq p, \forall q \geq p, \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{L^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq 0, |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leq \varepsilon \Rightarrow (u_n^{(p)})_{p \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C} \Rightarrow$ il existe $u_n^\infty \in \mathbb{C}$ t.q. $u_n^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} u_n^\infty$). Considérons alors la suite $u^\infty = (u_n^\infty)_{n \geq 0}$; $\forall N \geq 0, \forall p \geq p, \forall q \geq p, \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}|^2 \leq \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)} - u_n^\infty|^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^N |u_n^\infty|^2 \leq 2 \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)}|^2 + \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)} - u_n^\infty|^2 \leq 2 \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)}|^2 + \varepsilon^2 \Rightarrow u^\infty \in L^2(\mathbb{D})$, et $\forall p \geq p, \forall N \geq 0, \sum_{n=0}^N |u_n^{(p)} - u_n^\infty|^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \|u^{(p)} - u^\infty\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow u^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} u^\infty$ d'où la complétude de $C^2(\mathbb{D})$, et le fait qu'il s'agit d'un espace de Hilbert. Le même est identique pour l'espace réel $C^2(\mathbb{R})$.

Un second exemple canonique d'espace de Hilbert de dimension infinie est l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable sur un sous-ensemble mesurable Ω (de mesure de Lebesgue non nulle) de $\mathbb{R}^N$. Considérons la $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel:

$$L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

et pour:

$$\forall (f, g) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Lorsque les fonctions f et g appartiennent à l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, le produit $f \overline{g}$ est bien défini et mesurable sur Ω , et:

$$\forall x \in \Omega, |f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2).$$

La fonction $f \overline{g}$ est donc intégrable sur Ω , ce qui assure que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est bien définie sur $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. De plus, elle satisfait:

$$(i) \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4, \quad \langle \lambda_1 f_1 + g_1, \lambda_2 f_2 + g_2 \rangle_{\mathcal{L}^2} \\ = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{L}^2} + \lambda_1 \langle f_1, g_2 \rangle_{\mathcal{L}^2} + \overline{\lambda_2} \langle g_1, f_2 \rangle_{\mathcal{L}^2} + \langle g_1, g_2 \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

$$(ii) \quad \forall (f, g) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \quad \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \overline{\langle g, f \rangle_{\mathcal{L}^2}}.$$

$$(iii) \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \langle f, f \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

L'application $\langle, \rangle_{\mathcal{L}^2}$ est donc bilinéaire ou sesquilinéaire, symétrique ou hermitienne, et positive. Par contre, nous observons aussi que :

$\forall f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \langle f, f \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = 0 \Leftrightarrow \text{p.p.t. } x \in \Omega, f(x) = 0,$
de sorte que l'application $\langle, \rangle_{\mathcal{L}^2}$ n'est pas définie sur $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et donc n'est pas un produit scalaire réel ou complexe sur cet espace.

Afin de contourner cette difficulté, nous introduisons la relation d'équivalence :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad f \sim g \Leftrightarrow \text{p.p.t. } x \in \Omega, f(x) = g(x),$$

et nous notons $\tilde{f}$ la classe d'équivalence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ pour cette relation, soit l'ensemble :

$$\tilde{f} = \{ g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ t.q. } g \sim f \}.$$

Nous définissons alors l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation :

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \{ \tilde{f}, f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \}.$$

Cet ensemble possède une structure de $\mathbb{R}$ -ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel par la somme et le produit externe :

$$\begin{cases} \forall (\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \quad \tilde{f} + \tilde{g} = (\tilde{f+g}), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad \lambda \tilde{f} = (\tilde{\lambda f}). \end{cases}$$

Observons ici que ces deux opérations sont bien définies, puisque :

$$\begin{cases} \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4, \quad f_1 \sim f_2 \text{ et } g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2, \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \quad f_1 \sim f_2 \Rightarrow \lambda f_1 \sim \lambda f_2. \end{cases}$$

De façon similaire, l'application $\langle, \rangle_{\mathcal{L}^2}$ définie par :

$$\forall (\tilde{f}, \tilde{g}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \quad \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

est bien définie. En effet, lorsque $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4$ satisfait

$f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, nous avons :

$$\text{p.p.t. } x \in \Omega, \quad \overline{f_1(x)} g_1(x) = \overline{f_2(x)} g_2(x),$$

de sorte que :

$$\langle f_2, g_2 \rangle_{L^2} = \langle f_2, g_2 \rangle_{L^2}.$$

De plus, cette application continue à satisfaire:

- (i) $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C}^2, \forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^4, \langle \lambda_1 f_1 + g_1, \lambda_2 f_2 + g_2 \rangle_{L^2}$
 $= \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} + \lambda_1 \langle f_1, g_2 \rangle_{L^2} + \overline{\lambda_2} \langle g_1, f_2 \rangle_{L^2} + \langle g_1, g_2 \rangle_{L^2}$
- (ii) $\forall (f, g) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle_{L^2} = \overline{\langle g, f \rangle_{L^2}}$
- (iii) $\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \langle f, f \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \geq 0.$

Par contre, elle vérifie aussi:

$$\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \langle f, f \rangle_{L^2} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow f = \tilde{0}.$$

Comme la classe d'équivalence $\tilde{0}$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est donc bilinéaire ou sesquilinéaire, symétrique ou hermitienne, positive et définie sur $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Cet espace est un espace préhilbertien réel ou complexe pour ce produit scalaire réel ou complexe.

En pratique, il n'est pas si facile de manipuler les classes de fonctions qui constituent l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Il est préférable de continuer à manipuler les fonctions qui composent ces classes. Dans la suite, nous identifions ces classes avec l'une des fonctions (on choisit la plus simple possible) qui les composent. Autrement dit, nous considérons l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ non pas comme un espace de classes de fonctions, mais comme un espace de fonctions. Une fonction f dans cet espace sera connue dès que sa valeur sur un ensemble de mesure pleine sera connue, et deux fonctions f et g seront égales dès qu'elles seront égales presque partout.

Ex: (i) Soit $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1], f(x) = \ln|x|$. La fonction f est bien définie sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$, et elle satisfait: $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^0 (\ln|x|)^2 dx + \int_0^1 (\ln|x|)^2 dx < +\infty$. Elle définit sans ambiguïté une fonction de $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ (même si sa valeur en 0 n'est pas donnée), puisque $[-1, 0[\cup]0, 1]$ est un sous-ensemble de mesure pleine de $[-1, 1]$.

(ii) Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ si $x \leq 0$, 0 sinon. Comme $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble dénombrable, donc de mesure nulle de $\mathbb{R}$, la fonction f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à la fonction nulle dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Avec ces abus de langage, l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ satisfait:

Théorème: Soit Ω un sous-ensemble mesurable (de mesure de Lebesgue non nulle) de $\mathbb{R}^n$.
L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace préhilbertien réel ou complexe pour le produit scalaire réel ou complexe:

$$\forall (f, g) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

La norme euclidienne ou hermitienne associée

$$\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Hölder):

$$\forall (f, g) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et l'inégalité triangulaire (ou de Minkowski):

$$\forall (f, g) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^2, \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration: Nous avons déjà établi que $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace préhilbertien réel ou complexe pour le produit scalaire ci-dessus. Les autres résultats de cet énoncé résultent de la théorie précédente des espaces préhilbertiens réels ou complexes.

L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est de plus complet pour sa norme euclidienne ou hermitienne.

Théorème: Soit Ω un sous-ensemble mesurable (de mesure de Lebesgue non nulle) de $\mathbb{R}^n$.
L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace hilbertien pour le produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle_{L^2}$.

Démonstration: (i) Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Par définition:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall m \geq N, \|f_m - f_n\|_{L^2} \leq \varepsilon. \text{ Par récurrence}$$

sur $i \geq 0$, nous construisons une suite strictement croissante $(N_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$\forall i \geq 0, \forall m \geq N_i, \forall n \geq N_i, \|f_m - f_n\|_{L^2} \leq 2^{-i} \Rightarrow \forall i \geq 0, \|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_{L^2} \leq 2^{-i}.$$

(ii) Posons: $\forall i \geq 0, E_i = \sum_{n=N_i}^i |f_{N_{n+1}} - f_{N_n}|$. Les fonctions E_i appartiennent à $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et satisfont par l'inégalité de Minkowski: $\|E_i\|_{L^2}$

$$\leq \sum_{n=N_i}^i \|f_{N_{n+1}} - f_{N_n}\|_{L^2} \leq \sum_{n=N_i}^i 2^{-n} \leq 2. \text{ Par la Lemme de Weierstrass,}$$

la fonction $E = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_{N_{n+1}} - f_{N_n}|$ est mesurable sur Ω , et elle

satisfait : $\int_{\Omega} |F(x)|^2 dx \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |F_i(x)|^2 dx \leq 2$. En particulier, la fonction F est finie presque partout et appartient à l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iii) Sachant que F est finie presque partout, la série $f_{N_0} + \sum_{i \geq 0} (f_{N_{i+2}} - f_{N_i})$ est absolument convergente, donc convergente presque partout sur Ω . Notons f_{∞} sa limite, qui est donc bien définie presque partout sur Ω (et définit donc une classe de fonctions à égalité presque partout près). Comme $\forall i \geq 0$, p.p.t. $x \in \Omega$, $|f_{N_0}(x) + \sum_{i=0}^i (f_{N_{i+2}}(x) - f_{N_i}(x))| \leq |f_{N_0}(x)| + |F(x)|$, à la limite $i \rightarrow \infty$, $|f_{\infty}(x)| \leq |f_{N_0}(x)| + |F(x)| \Rightarrow |f_{\infty}(x)|^2 \leq 2(|f_{N_0}(x)|^2 + |F(x)|^2)$; sachant que f_{N_0} et F sont dans $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $f_{\infty} \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(iv) Rappelons alors que $\forall i \geq 0$, $\forall n \geq N_i$, $\forall k \geq i$, $\|f_n - f_{N_k}\|_{L^2} \leq 2^{-i}$; sachant que $\|f_n(x) - f_{N_k}(x)\|_{L^2}^2 = \|f_n(x) - f_{N_0}(x) - \sum_{j=0}^{k-1} (f_{N_{j+2}}(x) - f_{N_j}(x))\|_{L^2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_{\infty}(x)\|_{L^2}^2$ p.p., et p.p.t. $x \in \Omega$, $\|f_n(x) - f_{N_k}(x)\|_{L^2}^2 \leq 2^i (\|f_n(x) - f_{N_0}(x)\|_{L^2}^2 + |F(x)|^2)$, avec $(f_n - f_{N_0}, F) \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{\Omega} |f_n(x) - f_{N_k}(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f_{\infty}(x)|^2 dx$, d'où : $\forall n \geq N_i$, $\|f_n - f_{\infty}\|_{L^2} \leq 2^{-i} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_{\infty}$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, ce qui assure la complétude de $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Dém. La preuve de la complétude de l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ conduit à la rétro-proposition suivante des théorèmes de convergence dominée (dans sa version adaptée à une convergence dans $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$).

Cor. Soit Ω , un sous-ensemble mesurable (de mesure de Lebesgue non nulle) de $\mathbb{R}^n$. Considérons une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ convergente de limite $f_{\infty} \in L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. Alors il existe une extraction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et une fonction $F \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ telle que :

- (i) $f_{\varphi(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f_{\infty}$ p.p. sur Ω ,
- (ii) $\forall i \geq 0$, p.p.t. $x \in \Omega$, $|f_{\varphi(i)}(x)| \leq F(x)$.

Dém. Comme la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $L^2(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, elle est de Cauchy dans cet espace. Avec les notations de la preuve du théorème précédent, l'extraction φ définie par : $\forall i \geq 0$, $\varphi(i) = N_i$ satisfait : p.p.t. $x \in \Omega$, $f_{\varphi(i)}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f_{\infty}(x)$, et $|f_{\varphi(i)}(x)| \leq |f_{\varphi(0)}(x)| + |F(x)|$. Il suffit de choisir la fonction F comme le second membre de cette inégalité (avec un change-

ment de notation adopté) pour conclure la preuve du corollaire.

II. Théorème de projection sur un convexe fermé et orthogonalité

Considérons un espace de Hilbert réel ou complexe H muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et notons $\| \cdot \|$, la norme euclidienne ou hermitienne associée.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé

Commençons par rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe de H .

Déf: Soit C un sous-ensemble de l'espace de Hilbert H . L'ensemble C est convexe

$$\text{si: } \forall (x, y) \in C^2, \forall 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ex: (i) Si V est un sous-espace vectoriel de H , alors V est convexe. En effet,

$$\forall (x, y) \in V^2, \forall 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda x + (1-\lambda)y \in V.$$

(ii) La boule fermée $B_F(a, r)$ de centre $a \in H$ et de rayon $r > 0$ est convexe.

En effet, si $(x, y) \in B_F(a, r)^2$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, alors, par l'inégalité

$$\text{triangulaire: } \|\lambda x + (1-\lambda)y - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \leq \lambda \|x-a\| + (1-\lambda) \|y-a\| \leq (\lambda + 1-\lambda)r = r.$$

Dans un espace de Hilbert, il est possible de définir la projet de n'importe quel point de cet espace sur un sous-ensemble convexe fermé non vide.

Théorème de projection sur un convexe fermé: Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H .

(i) Quel que soit le vecteur $x \in H$, il existe un unique élément $P_C(x) \in C$ tel que:

$$\|x - P_C(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

(ii) Le vecteur $p_C(x)$ est appelé projeté (orthogonal) du vecteur x sur C . Il est caractérisé par le fait d'être l'unique élément de C tel que:

$$\forall y \in C, \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0.$$

Dém: (i) Unicité si existence. Supposons qu'il existe $(y_1, y_2) \in C$ tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$; par l'identité du parallélogramme, $\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) - \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|^2 = d^2 - \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|^2$, où $d = \min_{y \in C} \|x - y\|$; comme C est convexe, $\frac{y_1 + y_2}{2} \in C \Rightarrow \|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\|^2 \geq d^2 \Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|y_1 - y_2\| = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$, d'où l'unicité si existence.

(ii) Existence. Soit $d = \inf_{y \in C} \|x - y\|$; par définition de l'infimum, il existe une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de C telle que $\|x - y_n\| \rightarrow d$; par l'identité du parallélogramme, $\forall m, n \geq 0$, $\|\frac{y_m + y_n}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 + \frac{1}{2}(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2)$
 $\Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 = -\frac{1}{2}\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 + (\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2)$; comme C est convexe, $\frac{y_m + y_n}{2} \in C \Rightarrow \|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 \geq d^2 \Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 \leq 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2 - 2d^2)$; sachant que $\|x - y_n\| \rightarrow d$, et $\|x - y_m\| \rightarrow d$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 0$ t.q. $\forall m \geq N, \forall n \geq N, \|y_m - y_n\| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow (y_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy; comme C est fermé, il existe $y_\infty \in C$ tel que $y_n \rightarrow y_\infty$; par continuité de la norme, $\|x - y_n\| \rightarrow \|x - y_\infty\| \Rightarrow \|x - y_\infty\| = d = \min_{y \in C} \|x - y\|$, d'où l'existence de $p_C(x) = y_\infty$.

(iii) Caractérisation directe. Soit $y \in C$; comme C est convexe, $\forall 0 \leq t \leq 1, (1-t)p_C(x) + ty \in C \Rightarrow \|x - p_C(x)\|^2 \leq \|x - p_C(x) + t(y - p_C(x))\|^2 = \|x - p_C(x)\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), -y + p_C(x) \rangle) + t^2 \|y - p_C(x)\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2t \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0$.

(iv) Caractérisation réciproque. Soit $z \in C$ t.q. $\forall y \in C, \operatorname{Re}(\langle x - z, y - z \rangle) \leq 0$; pour $y \in C$, $\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x - z, z - y \rangle) + \|y - z\|^2 \geq \|x - z\|^2$, d'où $\|x - z\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$, et par unicité, $z = p_C(x)$.

Ex: Considérons la boule unité fermée $B = B_2(0,1)$ d'un espace de Hilbert réel H , et vérifions que le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in H$ sur B est donné par:

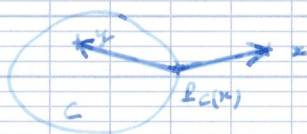
$\forall x \in H, p_B(x) = x$ si $\|x\| \leq 1$, $\frac{x}{\|x\|}$ sinon. En effet, si $\|x\| \leq 1$, alors

$x \in B \Rightarrow \|x - p_B(x)\| = \|x - x\| = 0 = \min_{y \in B} \|x - y\|$; si $\|x\| \geq 1$, alors,

$\forall y \in B, \langle x - \frac{x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \rangle = (1 - \frac{1}{\|x\|}) (\langle x, y \rangle - \|x\|)$; sachant

que $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq \|x\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
 $\langle x - \frac{x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \rangle \leq 0$, d'où par la caractérisation du projeté,
 $P_C(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Dém: (i) Il est facile de retrouver la caractérisation du projeté orthogonal dans le plan euclidien :



$$\forall y \in C, \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0.$$

(ii) La projection orthogonale sur un convexe fermé possède la propriété de contracter les distances.

Prop: Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H . La projection P_C est continue sur H , et elle satisfait :

$$\forall x, y \in H, \|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Dém: Par la caractérisation du projeté, on a $\langle x - P_C(x), P_C(y) - P_C(x) \rangle \leq 0$, et
 de $\langle y - P_C(y), P_C(x) - P_C(y) \rangle \leq 0$, d'où en sommant, on a $\langle x - P_C(x) - y + P_C(y), P_C(y) - P_C(x) \rangle \leq 0 \Rightarrow \|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leq \langle y - x, P_C(y) - P_C(x) \rangle \leq \|y - x\| \|P_C(y) - P_C(x)\|$, d'où : $\|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|y - x\|$, inégalité qui assure la continuité de la projection P_C .

Dans le cas où le sous-ensemble convexe fermé est un sous-espace vectoriel fermé de H , la projection orthogonale possède les propriétés supplémentaires suivantes.

Thm: Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H .

(i) La projection orthogonale P_V sur V est une application linéaire continue de H sur V qui satisfait :

$$(\forall x \in H, P_V(P_V(x)) = P_V(x),$$

$$(\forall x, y \in H, \|P_V(x) - P_V(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(ii) Étant donné un vecteur $x \in H$, la projection orthogonale de x sur V est caractérisée par :

$$\forall y \in V, \langle x - P_V(x), y \rangle = 0.$$

Dém: (i) Caractérisation: Par le théorème de projection sur un convexe fermé,

la projection orthogonale $P_V(x)$ est bien définie, et satisfait: $\forall y \in V$, $\operatorname{Re} \langle x - P_V(x), y - P_V(x) \rangle \leq 0$; pour $y = z + P_V(x) \in V$, avec $z \in V$, $\forall z \in V$, $\operatorname{Re} \langle x - P_V(x), z \rangle \leq 0$; comme $-z \in V$, $\operatorname{Re} \langle x - P_V(x), z \rangle \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - P_V(x), z \rangle = 0$; comme $z \in V$ dans le cas complexe, $\operatorname{Re}(i \langle x - P_V(x), z \rangle) = 0 \Rightarrow \langle x - P_V(x), z \rangle = 0$; réciproquement, pour $y = z - P_V(x)$, $\forall z \in V$, $\langle x - P_V(x), z - P_V(x) \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - P_V(x), z - P_V(x) \rangle \leq 0$, ce qui caractérise bien la projection orthogonale P_V .

(ii) Propriétés de la projection orthogonale P_V . L'application P_V est bien définie de H dans V , et satisfait: $\forall (x, y) \in H^2$, $\|P_V(x) - P_V(y)\| \leq \|x - y\| \Rightarrow P_V$ est continue sur H ; étant donné $\lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$, et $(x, y) \in H^2$, $\forall z \in V$, $\langle \lambda x + y - \lambda P_V(x) - P_V(y), z \rangle = \lambda \langle x - P_V(x), z \rangle + \langle y - P_V(y), z \rangle = 0$, d'où par la caractérisation précédente, $P_V(\lambda x + y) = \lambda P_V(x) + P_V(y) \Rightarrow P_V$ est linéaire; enfin, $\forall x \in H$, $P_V(x) \in V$, et $\forall y \in V$, $P_V(y) = y \Rightarrow P_V(P_V(x)) = P_V(x)$.

La projection orthogonale sur un sous-espace fermé permet de mieux définir l'orthogonal de ce sous-espace.

2. Orthogonal d'un sous-espace

a. Orthogonal d'une partie

L'orthogonal d'une partie (soit d'un sous-ensemble) X de H est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X .

Déf. Soit X un sous-ensemble non vide de H . L'orthogonal $X^\perp$ de X est défini par:

$$X^\perp = \{ y \in H \mid \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0 \}.$$

Ex. (i) L'orthogonal du singleton $\{0\}$ est: $\{0\}^\perp = H$. En effet: $\forall x \in H$, $\langle 0, x \rangle = 0$.

(ii) L'orthogonal de H est: $H^\perp = \{0\}$. En effet, si $u \in H^\perp$, alors: $\forall y \in H$, $\langle u, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$, et: $\forall y \in H$, $\langle 0, y \rangle = 0$. Observons ici que: $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$, et $(\{0\}^\perp)^\perp = \{0\}$.

Chm. Soit X un sous-ensemble non vide de H . L'orthogonal $X^\perp$ est un sous-espace

ce vectoriel fermé de H .

Dém: (i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(x, y) \in X^\perp$; $\forall z \in X, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \Rightarrow \lambda x + y \in X^\perp \Rightarrow X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H .

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in (X^\perp)^{H'}$ t.q. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_\infty \in H$; comme $\forall z \in X, \forall n \geq 0, \langle x_n, z \rangle = 0$, et $\langle, \rangle$ est continue sur H^2 , à la limite $n \rightarrow +\infty, \langle x_n, z \rangle = 0 \Rightarrow x_\infty \in X^\perp \Rightarrow X^\perp$ est fermé.

Ex: $H = \mathbb{R}^3$ et $\{0\} = H^\perp$ sont bien des sous-espaces vectoriels fermés de H .

L'orthogonal possède les propriétés énoncées suivantes.

Prop: Soit X et Y deux sous-ensembles non vides de H . Alors:

(i) Si $X \subset Y$, alors: $Y^\perp \subset X^\perp$.

(ii) $(\overline{X})^\perp = X^\perp$.

(iii) $(\text{Vect}(X))^\perp = X^\perp$.

Dém: (i) Si $z \in Y^\perp$, alors: $\forall y \in Y, \langle z, y \rangle = 0$; comme $\forall x \in X, x \in Y$, $\langle z, x \rangle = 0 \Rightarrow z \in X^\perp \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$.

(ii) Comme $X \subset \overline{X}$, $(\overline{X})^\perp \subset X^\perp$; si $y \in X^\perp$, alors, $\forall x \in X, \langle y, x \rangle = 0$; si $y \in \overline{X}$, alors, il existe $(x_n)_{n \geq 0} \in X^{H'}$ t.q. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$; comme $\forall n \geq 0, \langle y, x_n \rangle = 0$, et $\langle, \rangle$ est continue sur H^2 , à la limite $n \rightarrow +\infty, \langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y \in (\overline{X})^\perp \Rightarrow (\overline{X})^\perp = X^\perp$.

(iii) Comme $X \subset \text{Vect}(X)$, $(\text{Vect}(X))^\perp \subset X^\perp$; si $y \in X^\perp$, alors, $\forall x \in X, \langle y, x \rangle = 0 \Rightarrow \forall z \in \text{Vect}(X), \langle y, z \rangle = 0 \Rightarrow y \in (\text{Vect}(X))^\perp$ d'où $(\text{Vect}(X))^\perp = X^\perp$.

Cor: Soit X un sous-ensemble non vide de H . Alors:

$$X^\perp = (\overline{\text{Vect}(X)})^\perp.$$

Dém: Cette identité résulte de la proposition précédente, puisque $X^\perp = (\text{Vect}(X))^\perp$, et $(\text{Vect}(X))^\perp = (\overline{\text{Vect}(X)})^\perp$.

Dém: Comme l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel fermé, on conclura aussitôt que l'orthogonal de n'importe quelle partie est l'orthogonal d'un sous-espace fermé, et qu'il suffit donc

d'étudier les orthogonaux de ces ensembles.

b. Orthogonal d'un sous-espace fermé.

L'orthogonal d'un sous-espace fermé est un supplémentaire de ce sous-espace.

Chen: Soit V un sous-espace fermé de H .

(i) L'orthogonal $V^\perp$ satisfait la somme directe:

$$H = V \oplus V^\perp.$$

(ii) Étant donné un vecteur $x \in H$, la décomposition de ce vecteur dans la somme directe précédente est donnée par:

$$x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x),$$

où P_V et $P_{V^\perp}$ sont la projection orthogonale sur V , respectivement sur $V^\perp$.

(iii) L'orthogonal $(V^\perp)^\perp$ satisfait:

$$(V^\perp)^\perp = V.$$

Dém: (i) Soit $x \in V \cap V^\perp$; comme $x \in V$, $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V \cap V^\perp = \{0\}$.

(ii) Soit $x \in H$; comme V est un sous-espace fermé de H , la projéction $P_V(x)$ est bien définie et il satisfait: $\forall y \in V$, $\langle x - P_V(x), y \rangle = 0 \Rightarrow x - P_V(x) \in V^\perp \Rightarrow x = P_V(x) + x - P_V(x) \in V + V^\perp \Rightarrow H = V \oplus V^\perp$.

(iii) Soit $x \in H$; comme $\forall y \in V^\perp$, $\langle x - (x - P_V(x)), y \rangle = \langle P_V(x), y \rangle = 0$, la caractérisation du projécté orthogonal sur le sous-espace fermé $V^\perp$ assure que: $P_{V^\perp}(x) = x - P_V(x) \Rightarrow x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x)$.

(iv) Observons que: $\forall x \in V$, $\forall y \in V^\perp$, $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (V^\perp)^\perp$, d'où l'inclusion $V \subset (V^\perp)^\perp$; réciproquement, si $x \in (V^\perp)^\perp$, alors, x se décompose sous la forme $x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x)$; comme $P_{V^\perp}(x) \in V^\perp$, $\langle x, P_{V^\perp}(x) \rangle = 0$
 $\Rightarrow \langle P_V(x), P_{V^\perp}(x) \rangle + \|P_{V^\perp}(x)\|^2 = 0$; sachant que $\langle P_V(x), P_{V^\perp}(x) \rangle = 0$,
 $\|P_{V^\perp}(x)\| = 0 \Rightarrow P_{V^\perp}(x) = 0 \Rightarrow x = P_V(x) \in V$, d'où l'identité $(V^\perp)^\perp = V$.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire: $\forall (A, B) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$, et le sous-espace vectoriel: $V = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$. Comme la trace est une application continue sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$,

V est un sous-espace fermé de $M_n(\mathbb{R})$, et la projection orthogonale P_V est donnée par: $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), P_V(A) = A - \frac{1}{n} \text{tr}(A) I_n$; en effet, $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \langle A - P_V(A), B \rangle = \frac{1}{n} \text{tr}(A) \text{tr}(B) - \frac{1}{n} \text{tr}(A) \text{tr}(B) = 0$; la décomposition qui correspond à la somme directe $M_n(\mathbb{R}) = V \oplus V^\perp$ s'écrit alors: $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), A = A - \frac{1}{n} \text{tr}(A) I_n + \frac{1}{n} \text{tr}(A) I_n$, et nous vérifions que $\frac{1}{n} \text{tr}(A) I_n \in V^\perp$, puisque $\forall B \in V, \langle \frac{1}{n} \text{tr}(A) I_n, B \rangle = \frac{1}{n} \text{tr}(A) \text{tr}(B) = 0$; en particulier, nous concluons que: $V^\perp = \text{Vect}(I_n)$.

Le théorème précédent conduit à la caractérisation suivante des sous-espaces fermés de H .

Ex: Soit V un sous-espace vectoriel de H . Alors:

(i) $(V^\perp)^\perp = V$.

(ii) V est fermé si $(V^\perp)^\perp = V$.

Dém: (i) Comme $\bar{V}$ est un sous-espace fermé de H , par le théorème précédent, $\bar{V} = (\bar{V}^\perp)^\perp$; sachant que $V^\perp = (\bar{V})^\perp$, $(V^\perp)^\perp = (\bar{V}^\perp)^\perp = \bar{V}$.

(ii) En particulier, V est fermé si $\bar{V} = V$ si $V = (V^\perp)^\perp$.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire complexe: $\forall (f, g) \in L^2([-1, 1], \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$

(i) Comme la fonction constante égale à 1 appartient à $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$, et $\forall f \in L^2([-1, 1], \mathbb{C}), \|f\| \leq \frac{1}{2} (\|f\|^2 + 1)$, l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$ est bien définie lorsque $f \in L^2([-1, 1], \mathbb{C})$, ce qui assure que l'ensemble $V = \{f \in L^2([-1, 1], \mathbb{C}) \text{ t.q. } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0\}$ est bien défini; nous démontrons de plus qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$.

(ii) Toute fonction $f \in L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ s'écrit: $f = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx\right) 1 + \left(f - \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx\right) 1\right)$, avec $g = f - \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx\right) 1 \in V$, puisque $\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$; lorsque $f \in V^\perp, \langle f, g \rangle_{L^2} = 0$; comme $\langle 1, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^1 g(x) dx = 0, \langle g, g \rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow \|g\|_{L^2} = 0 \Rightarrow g = 0$, d'où $f = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx\right) 1 \in \text{Vect}(1)$; réciproquement, $\forall h \in V, \langle 1, h \rangle_{L^2} = \int_{-1}^1 h(x) dx = 0 \Rightarrow V^\perp = \text{Vect}(1)$.

(iii) Enfin, $\forall f \in L^2((-1,1), \delta)$, $f \in \text{Vect}(1)^\perp \Leftrightarrow \langle 1, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$
 $\Leftrightarrow f \in V$, d'où $V = \text{Vect}(1)^\perp$, puis $V = (V^\perp)^\perp$; en particulier, V est un sous-espace fermé de $L^2((-1,1), \delta)$.

III Bases hilbertiennes

Considérons un espace de Hilbert réel ou complexe H muni d'un produit scalaire réel ou complexe $\langle, \rangle$, et notons $\| \cdot \|$, la norme euclidienne ou hermitienne associée.

1. Espaces séparables et familles totales

Commençons par rappeler la notion de densité.

Déf: Soit X un sous-ensemble de H . L'ensemble X est dense dans l'espace de Hilbert H ssi, quel que soit le vecteur $x \in H$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de X telle que:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Ex: (i) L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) L'ensemble $\mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est dense dans $\mathbb{C}$. En effet,

$$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}, \exists ((a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2 \text{ s.t. } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \Rightarrow a_n + ib_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + ib.$$

Thm: Soit X un sous-ensemble de H . L'ensemble X est dense dans l'espace de Hilbert H ssi

$$\overline{X} = H.$$

Dém: Par définition de l'adhérence.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ et le sous-espace V des suites finies:

$$V = \{ (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ s.t. } \exists N \geq 0 \text{ s.t. } \forall n \geq N, u_n = 0 \}. \text{ Pour } (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}), \text{ posons: } \forall p \geq 0, \forall n \geq 0, u_n^{(p)} = u_n \text{ si } 0 \leq n \leq p, 0 \text{ sinon; les suites } (u_n^{(p)})_{n \geq 0} \text{ appartenant au sous-espace } V, \text{ et satisfaisant: } \|u^{(p)} - u\|_{\ell^2} =$$

$\left(\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \in \bar{V} \Rightarrow \ell^2(\mathbb{R}) \subset \bar{V} \Rightarrow \ell^2(\mathbb{R}) = \bar{V}$,
d'où la densité de V dans $\ell^2(\mathbb{R})$.

Rem: Les définitions et propriétés précédentes se généralisent (au moins) à un espace vectoriel normé quelconque. Les sous-espaces d'un espace de Hilbert vérifient la propriété supplémentaire suivante.

Prop: Soit V un sous-espace vectoriel de H . L'ensemble V est dense dans H si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

Dém: $\Rightarrow$ Si V est dense dans H , alors $\bar{V} = H \Rightarrow V^\perp = (\bar{V})^\perp = H^\perp = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Si $V^\perp = \{0\}$, alors: $\bar{V} = (V^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H \Rightarrow V$ est dense dans H .

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{C})$, et le sous-espace V des suites finies: $V = \left\{ (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \exists N \geq 0 \text{ t.q. } \forall n \geq N+1, u_n = 0 \right\}$.

Pour $p \geq 0$, la suite $e^{(p)}$ définie par: $\forall n \geq 0, e_n^{(p)} = 1$ si $p = n$, 0 sinon, appartient à V ; ainsi $(u_n)_{n \geq 0} \in V^\perp$, alors: $\forall p \geq 0, \langle u, e^{(p)} \rangle_{\ell^2} = 0 \Rightarrow u_p = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow V^\perp = \{0\} \Rightarrow V$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{C})$.

Introduisons alors la notion de séparabilité.

Def: L'espace de Hilbert H est séparable si il contient un sous-ensemble dénombrable X qui est dense dans H .

Ex: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont deux espaces de Hilbert séparables.

Thm: Si l'espace de Hilbert H est de dimension finie, alors il est séparable.

Dém: Soit $B = (e_1, \dots, e_N)$ une base de H ; considérons le sous-ensemble $X = \left\{ \sum_{j=1}^N r_j e_j, \text{ où } \forall 1 \leq j \leq N, r_j \in \mathbb{Q} \text{ (ou } \mathbb{R}) \right\}$; comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} + i\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, respectivement dans $\mathbb{C}$, $\forall (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ ($\mathbb{C}^N$), il existe des suites $(r_j^{(n)})_{n \geq 0}$ de $\mathbb{Q}$ (de $\mathbb{R} + i\mathbb{Q}$) telles que: $\forall 1 \leq j \leq N, r_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r_j \Rightarrow \sum_{j=1}^N r_j^{(n)} e_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^N r_j e_j \Rightarrow X$ est dense dans $H \Rightarrow H$ est séparable.

Ex: (i) $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{H}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ sont des espaces de Hilbert séparables.

(ii) Lorsque A désigne un sous-ensemble mesurable (de mesure de Le-

lesque non nulle) de $\mathbb{R}^N$, l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est aussi un espace de Hilbert séparable. La preuve de cette affirmation repose sur des propriétés fines de la mesure de Lebesgue, et sera ici admise.

Rem: Les définitions et propriétés précédentes se généralisent à nouveau à un espace vectoriel normé quelconque.

Il est possible de caractériser la séparabilité par la notion de partie totale.

Def: Soit X un sous-ensemble de H . L'ensemble X est total si le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(X)$ engendré par X est dense dans H , soit si:

$$\overline{\text{Vect}(X)} = H.$$

Ex: (i) Si H est de dimension finie, et si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de H , alors, $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une partie totale de H , puisque $H = \text{Vect}(X) = \overline{\text{Vect}(X)}$.

(ii) Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et posons: $\forall p \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, e_n^{(p)} = 1$ si $p = n, 0$ sinon. Les suites $(e_n^{(p)})_{p \geq 0}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, et elles engendrent le sous-espace V des suites finies de $L^2(\mathbb{R})$; comme V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, la partie $\{e_n^{(p)}, p \geq 0\}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.

Def: Soit X un sous-ensemble de H . La partie X est totale si:

$$X^\perp = \{0\}.$$

Dém: En effet, X est totale si $\text{Vect}(X)$ est dense dans H ; or sachant que $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace de H , $\text{Vect}(X)$ est dense dans H si $\text{Vect}(X)^\perp = \{0\}$; comme $\text{Vect}(X)^\perp = X^\perp$, X est totale si $X^\perp = \{0\}$.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{C})$ et posons: $\forall p \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, e_n^{(p)} = 1$ si $p = n, 0$ sinon; les suites $(e_n^{(p)})_{p \geq 0}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{C})$, et si une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ appartient à l'orthogonal de $X = \{e_n^{(p)}, p \geq 0\}$, alors: $\forall p \geq 0, \langle u, e_n^{(p)} \rangle_{L^2(\mathbb{C})} = 0 \Rightarrow u_p = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow X^\perp = \{0\} \Rightarrow X$ est une partie totale de $L^2(\mathbb{C})$.

Def: L'espace de Hilbert H est séparable si il contient une partie dénombrable totale.

Dém: $\Rightarrow$ Comme H est séparable, il existe un sous-ensemble dénombrable X tel que

X est dense dans H ; comme $x \in \text{Vect}(X)$, $\text{Vect}(X)$ est dense dans $H \Rightarrow X$ est une partie dénombrable et totale de H .

Ex: Soit X une partie dénombrable et totale de H , que nous décrivons sous la forme $X = \{x_n, n \geq 0\}$. Étant donné un vecteur $x \in H$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geq 0$ et des nombres $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{p+1}$ t.q. $\|x - \sum_{j=0}^p \lambda_j x_j\| \leq \varepsilon$; par densité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, respectivement de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, il existe des nombres $(\mu_0, \dots, \mu_p) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{p+1}$ tels que $\|\sum_{j=0}^p \mu_j x_j - \sum_{j=0}^p \lambda_j x_j\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x - \sum_{j=0}^p \mu_j x_j\| \leq 2\varepsilon \Rightarrow Y = \{\sum_{j=0}^p \mu_j x_j, p \geq 0, (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})^{p+1}\}$ est dense dans H ; comme une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, Y est dénombrable $\Rightarrow H$ est séparable.

Ex: L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est séparable, puisqu'il contient une partie dénombrable totale, en l'occurrence la sous-ensemble $\{e^{(p)}, p \geq 0\}$ où: $\forall p \geq 0, \forall n \geq 0, e_n^{(p)} = 1$ si $n=p, 0$ sinon.

2. Définition et utilisation des bases hilbertiennes

a. Construction des bases hilbertiennes

La notion de base hilbertienne étend la notion de base orthogonale à un espace de Hilbert (séparable) quelconque.

Def: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de H .

(i) La famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale si:

$$\forall i \in I, \forall j \in I, \text{ avec } i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

(ii) La famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale ou orthornormée si elle est orthogonale et:

$$\forall i \in I, \|e_i\| = 1.$$

Ex: (i) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) est orthornormée par le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).

(ii) Soit $\forall p \geq 0, \forall n \geq 0, e_n^{(p)} = 1$ si $n=p, 0$ sinon; la famille $(e_n^{(p)})_{p \geq 0}$ est

orthonormée dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (ou dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{S})$), puisque $\forall p \geq 0, \|e(p)\|_{\mathcal{L}^2} = 1$, et $\forall q \neq p, \langle e(p), e(q) \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0$.

Prop: Si une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs non nuls de H est orthogonale, alors elle est libre. En particulier, si la famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée, alors elle est libre.

Dém: Soit $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}) \in \mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ t.q. $\sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} e_{i_j} = 0$; pour $1 \leq h \leq p$, $0 = \langle e_{i_h}, \sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} e_{i_j} \rangle = \overline{\lambda_{i_h}} \langle e_{i_h}, e_{i_h} \rangle \Rightarrow \lambda_{i_h} = 0 \Rightarrow (e_i)_{i \in I}$ est une famille libre de H .

Ex: La famille $((1, 2, 0), (0, 1, -1))$ est orthogonale, donc libre dans $\mathbb{R}^3$.

Déf: Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormée de H si il s'agit d'une base algébrique de H , et si elle est orthonormée.

Ex: La base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).

Ex: Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormée de H si elle est génératrice et orthonormée.

Dém: La preuve découle du fait qu'une famille orthonormée est libre.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire des familles orthonormées, et par suite des bases orthonormées.

Thm (Propriété d'orthonormalisation de Gram-Schmidt): (i) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de H . Il existe une famille orthonormée $(u_1, \dots, u_p)$ de H telle que :

$$\forall 1 \leq h \leq p, \text{Vect}(e_1, \dots, e_h) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_h).$$

(ii) En particulier, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de H , alors, $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormée de H .

Dém: (i) La construction de la famille orthonormée $(u_1, \dots, u_p)$ se fait par récurrence sur $1 \leq h \leq p$. On pose $h=1$, $e_1 \neq 0$, puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, et $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ convient; supposons avoir construit des vecteurs $u_1, \dots, u_{h-1}$ tels que $(u_1, \dots, u_{h-1})$ est orthonormée, et $\forall 1 \leq j \leq h-1, \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_j)$.

$\dots, u_j)$ du rang $k+1$, posons: $v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_{k+1}, u_j \rangle u_j$;
 par définition, $\forall k_j \leq k$, $\langle v_{k+1}, u_j \rangle = \langle e_{k+1}, u_j \rangle - \langle e_{k+1}, u_j \rangle = 0$
 $\Rightarrow (u_1, \dots, u_k, v_{k+1})$ est orthogonale; de plus, si $v_{k+1} = 0$, alors
 $e_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \Rightarrow e_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, ce qui est
 absurde, puisque $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est libre! $\Rightarrow v_{k+1} \neq 0 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$
 est normé, et $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est orthogonale; enfin, par définition,
 $u_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) \Rightarrow \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots,$
 $e_{k+1})$, et $u_{k+1} = \frac{1}{\|v_{k+1}\|} (e_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_{k+1}, u_j \rangle u_j)$; comme
 $\|v_{k+1}\| \neq 0$, $e_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) \Rightarrow \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) \subset$
 $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})$, d'où $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})$,
 puis le résultat par récurrence.

(ii) Lorsque $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de H , $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(e_1,$
 $\dots, e_p) = H \Rightarrow (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice; comme $(u_1, \dots, u_p)$ est or-
 thogonale, $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthogonale de H .

Cor: Si l'espace de Hilbert H est de dimension finie, alors, il possède
 une base orthogonale.

Dém: Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de H ; par le procédé d'orthogonalisation
 de Gram-Schmidt, il existe alors une base orthogonale $(u_1, \dots, u_p)$ de H .

Mais pouvons nous introduire la notion de base hilbertienne.

Def: Une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de vecteurs de H est une base hilbertienne de H si:

- (i) La famille $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est orthogonale.
- (ii) Le sous-ensemble $\{e_i, i \in \mathbb{I}\}$ est total dans H .

Ex: Soit $\forall p \geq 0, \forall n \geq 0, e_n^{(p)} = 1$ si $n=p, 0$ sinon; la famille $(e_n^{(p)})_{p \geq 0}$ est
 orthogonale dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (ou $\ell^2(\mathbb{Z})$), et le sous-ensemble $\{e_n^{(p)}, p \geq 0\}$ est
 total dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (ou $\ell^2(\mathbb{Z})$) $\Rightarrow (e_n^{(p)})_{p \geq 0}$ est une base hilbertienne de H .

Thm: Supposons que l'espace de Hilbert H est de dimension finie. Alors
 toute base orthogonale de H est une base hilbertienne de H . En particulier,
 l'espace de Hilbert H possède une base hilbertienne.

Dém. Comme une base orthogonale de H est génératrice, le sous-ensemble associé à cette base est total dans H , et cette base orthogonale est bien une base hilbertienne de H (qui possède donc une base hilbertienne par le corollaire précédent).

Ex. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) est une base hilbertienne de cet espace de Hilbert.

Un espace de Hilbert séparable de dimension infinie continue à posséder une base hilbertienne.

Énon. Supposons que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors l'espace de Hilbert H possède une base hilbertienne.

Dém. (i) Comme H est séparable, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs de H telle que $\{x_n, n \geq 0\}$ est dense dans H ; posons $V = \text{Vect}(x_n, n \geq 0)$; comme $\{x_n, n \geq 0\} \subset V$, $H = \overline{\{x_n, n \geq 0\}} \subset \overline{V} \Rightarrow \overline{V} = H \Rightarrow V$ est dense dans H ; de plus, si V est de dimension finie, alors V est fermé $\Rightarrow H = V$ est de dimension finie, ce qui est absurde! $\Rightarrow V$ est de dimension infinie.

(ii) Construisons par récurrence une extraction $(x_{q(n)})_{n \geq 0}$ de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $(x_{q(n)})_{n \geq 0}$ est une base de V ; au rang $n=0$, posons $q(0) = \min \{n \geq 0 \text{ t.q. } x_n \neq 0\}$; comme $\{x_n, n \geq 0\}$ est dense dans H , $q(0)$ est bien défini, et $(x_{q(0)})$ est une famille libre, puisque $x_{q(0)} \neq 0$; enfin, $\text{Vect}(x_0, \dots, x_{q(0)}) = \text{Vect}(x_{q(0)})$; supposons avoir construit l'extraction q jusqu'au rang n telle que $(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)})$ est une famille libre, et $\text{Vect}(x_0, \dots, x_{q(n)}) = \text{Vect}(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)})$; au rang $n+1$, posons $q(n+1) = \min \{m \geq q(n) + 1 \text{ t.q. } x_m \notin \text{Vect}(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)})\}$; comme V est de dimension infinie, et $(x_n)_{n \geq 0}$ est une famille génératrice de V , $q(n+1)$ est bien défini, et par construction, $(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)}, x_{q(n+1)})$ est libre; de plus, $\forall 1 \leq m \leq q(n+1)-1$, $x_m \in \text{Vect}(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)})$, et $x_{q(n+1)} \notin \text{Vect}(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n)}) \Rightarrow \text{Vect}(x_0, \dots, x_{q(n+1)}) = \text{Vect}(x_{q(0)}, \dots, x_{q(n+1)})$, d'où la construction de l'extraction $(x_{q(n)})_{n \geq 0}$ par récurrence sur $n \geq 0$; la famille $(x_{q(n)})_{n \geq 0}$ est alors libre et génératrice dans V , donc est une base de V .

(iii) Appliquons le procédé d'orthogonalisation de Gram - Schmidt à la famille $(x_{q(n)})_{n \geq 0}$ afin d'obtenir une famille orthogonale $(e_n)_{n \geq 0}$ telle que:

$\forall n \geq 0, \text{vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$; comme $V = \text{vect}(e_n)_{n \geq 0}$,
 $V = \text{vect}(e_n)_{n \geq 0}$; sachant que $\overline{V} = H$, $\overline{\text{vect}(e_n)_{n \geq 0}} = H \Rightarrow \{e_n, n \geq 0\}$ est total dans $H \Rightarrow (e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H .

Ex: Considérons l'espace vectoriel $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q. } f \text{ est mesurable sur } \mathbb{R}, \text{ p.p.t. } x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x), \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$. Comme dans le cas des espaces $L^2(\Omega, \mathcal{G})$, où Ω est un sous-ensemble mesurable (de mesure de Lebesgue non nulle) de $\mathbb{R}$, nous pouvons définir l'espace des classes d'équivalence $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$, pour la relation d'égalité presque partout dans $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$, puis muni cet espace du produit scalaire complexe: $\forall (f, g) \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})^2, \langle f, g \rangle_{L^2_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. Comme dans le cas des espaces $L^2(\Omega, \mathcal{G})$, l'espace préhilbertien complexe ainsi construit est un espace de Hilbert complexe, dans lequel (nous admettons que) la sous-ensemble des fonctions continues 2π -périodiques est dense. Considérons alors les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définies par: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{inx}$; ces fonctions appartiennent à $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$ (que nous réduisons à un espace de fonctions pour l'abus de langage déjà commis pour les espaces de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{G})$), et elles satisfont: $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \langle e_m, e_n \rangle_{L^2_{\text{per}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = 1$ si $m=n$, 0 sinon $\Rightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$; soit alors $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \text{vect}(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes 2π -périodiques; par le théorème de Weierstrass, quelle que soit la fonction f continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telles que $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; sachant que $\forall n \geq 0, \|f_n - f\|_{L^2_{\text{per}}} \leq \|f_n - f\|_{\infty}$, $\|f_n - f\|_{L^2_{\text{per}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ contient l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques, donc par densité de cet ensemble dans $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ contenant $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$; en conclusion, $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$ telle que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est totale dans cet espace de Hilbert $\Rightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$; de même, les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ définies par: $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 1$, et $\forall n \geq 1, f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \cos(nx)$, et $g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \sin(nx)$, forment une base hilbertienne de $L^2_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

Rem: Dans l'exemple précédent, la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est naturellement indexée sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas un problème puisque $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.

5. Décomposition dans une base hilbertienne

En dimension finie, il est possible de décomposer tout vecteur dans une base orthonormée de la façon suivante.

Prop: Supposons que H est un espace de Hilbert de dimension finie et considérons une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_N)$ de cet espace. Alors:

$$(i) \quad \forall x \in H, \quad x = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k.$$

$$(ii) \quad \forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Dém: (i) Comme $B = (e_1, \dots, e_N)$ est une base de H , quel que soit $x \in H$, il existe des nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$ tels que $x = \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq N$, $\langle x, e_j \rangle = \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow x = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$.

(ii) La formule (i) assure alors que: $\|x\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{l=1}^N \langle x, e_l \rangle e_l \right\rangle$
 $= \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle \sum_{l=1}^N \overline{\langle x, e_l \rangle} \langle e_k, e_l \rangle$ par linéarité ou sesquilinearité du produit scalaire; comme $\langle e_k, e_l \rangle = 1$ si $k=l$, 0 sinon, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} = \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2$.

En dimension infinie, ce résultat se généralise (d'une façon à préciser) aux bases hilbertiennes. Afin de justifier cette généralisation, nous commençons par expliciter la projection orthogonale sur un sous-espace V de dimension finie de l'espace de Hilbert H .

Prop: Soit V un sous-espace de dimension finie de l'espace de Hilbert H . Considérons une base $B_V = (e_1, \dots, e_d)$ orthonormée de V . Alors la projection orthogonale P_V sur le sous-espace V est donnée par la formule:

$$\forall x \in H, \quad P_V(x) = \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle e_k$$

Dém: Comme V est un sous-espace de dimension finie, V est un sous-espace fermé de H , de sorte que la projection orthogonale P_V est bien définie, et caractérisée par le fait que, quel que soit $x \in H$, $P_V(x)$ est l'unique élément de V tel que: $\forall y \in V, \langle x - P_V(x), y \rangle = 0$; en particulier, comme $(e_1, \dots, e_d)$ est une base orthonormée de V , par le théorème précédent, $P_V(x) = \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle e_k$; sachant que $\langle P_V(x), e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$ par la caractérisation précédente, $P_V(x) = \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle e_k$.

Prop (Inégalité de Bessel): (i) Soit $(e_1, \dots, e_N)$ une famille orthonormée de H . Alors:

$$\forall x \in H, \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(ii) Supposons que H est un espace de Hilbert de dimension infinie et considérons une famille orthonormée $(e_n)_{n \geq 0}$ de H . Alors la série

$$\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 \text{ est convergente, et:}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dém: (i) Soit $V = \text{vect} (e_1, \dots, e_N)$; par le théorème précédent, $\forall x \in H, P_V(x) = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$, de sorte que $\|P_V(x)\|^2 = \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2$; par caractérisation de la projection orthogonale P_V , $\langle x - P_V(x), P_V(x) \rangle = 0 \Rightarrow \|P_V(x)\|^2 = \langle x, P_V(x) \rangle$, d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|P_V(x)\|^2 \leq \|x\| \|P_V(x)\| \Rightarrow \|P_V(x)\| \leq \|x\| \Rightarrow \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(ii) D'après la propriété (i), $\forall N \geq 0, \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow$ La série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente, et à la limite $N \rightarrow +\infty, \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Ex: Considérons la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$ définie par: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{in x}$; étant donnée une fonction $f \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$, observons que: $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-in u} du = c_n(f)$, où nous avons noté $c_n(f)$ le coefficient de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ de la fonction f ; en particulier, l'inégalité de Bessel précédente s'écrit: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^2 du$, ce qui est exactement l'inégalité de Bessel pour les séries de Fourier.

Nous déduisons de l'inégalité de Bessel la décomposition suivante de tout vecteur de H

dans une base hilbertienne.

Chm: Supposons que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de cet espace. Étant donné un vecteur $x \in H$, la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H , et sa somme est égale à:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x.$$

Dém: (i) Prenons $\forall N \geq 0$, $S_N = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n$; $\forall N \geq M \geq 0$, $S_N - S_M = \sum_{n=M+1}^N \langle x, e_n \rangle e_n$
 $\langle x, e_n \rangle e_n \Rightarrow \|S_N - S_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$; par l'inégalité de Bessel, la série $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente, donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)_{N \geq 0}$ est de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0$ t.q.
 $\forall N \geq M \geq N_\varepsilon, \sum_{n=M+1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \|S_N - S_M\|^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow (S_N)_{N \geq 0}$ est de Cauchy dans H , donc convergente $\Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H .

(ii) Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, la somme de cette série; si $m \geq n \geq 0$, alors:
 $\left\langle \sum_{k=0}^m \langle x, e_k \rangle e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$;
 par continuité du produit scalaire, à la limite $m \rightarrow +\infty$, $\langle y, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$
 $\Rightarrow \forall n \geq 0, \langle y - x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow \forall z \in \text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}, \langle y - x, z \rangle = 0 \Rightarrow y - x$
 $\in \text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}^\perp$; comme $(e_n)_{n \geq 0}$ est totale, $\text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}$ est dense dans $H \Rightarrow \text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}^\perp = \{0\} \Rightarrow y - x = 0$, d'où: $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$, et sa base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{inx}$. Lorsque $f \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$, $\langle f, e_n \rangle_{L^2_{\text{per}}}$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = c_n(f)$, de sorte que la thèse précédente signifie que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ est convergente dans $L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$, et que sa somme est égale à: $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$. Dans le cas où la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nous retrouvons le théorème de convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier. Notons que la convergence précédente a lieu au sens de la norme de H , mais qu'il ne s'agit en principe pas d'une convergence ponctuelle. Le théorème de Carleson affirme néanmoins que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f presque partout.

Ex (Formule de Parseval): Supposons que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de cet espace.

Alors:

$$(i) \forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

(ii) Étant donné deux vecteurs x et y de H , la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ est convergente, et elle satisfait:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Dém: (i) Rappelons que la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H , de somme égale à x ; par continuité de la norme, nous obtenons $\left\| \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \rightarrow \|x\|^2$; sachant que $\left\| \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente, et sa somme vaut: $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

(ii) Comme $\forall n \geq 0, |\langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}| \leq \frac{1}{2} (|\langle x, e_n \rangle|^2 + |\langle y, e_n \rangle|^2)$, l'inégalité de Bessel assure que la série $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ est absolument convergente, donc convergente; par continuité du produit scalaire, et comme $\sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x$, $\langle \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n, y \rangle \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle$; sachant que $\langle \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n, y \rangle = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ à la limite $N \rightarrow +\infty$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$, et sa base hilbertienne $(e_n)_n \in \mathbb{Z}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = e^{i n x}$. Rappelons que: $\forall f \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{T}), \forall n \in \mathbb{Z}, \langle f, e_n \rangle_{L^2_{\text{per}}} = c_n(f)$. Par la formule de Parseval, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$, formule qui n'est rien d'autre que l'extension de la formule de Parseval pour les séries de Fourier à l'espace $L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})$. De même, dans la base hilbertienne $(f_n)_{n \geq 0}, (g_n)_{n \geq 0}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{R}, f_0(x) = 1$, et $\forall n \geq 1, f_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$, et $g_n(x) = \sqrt{n} \sin(nx)$, nous retrouvons la formule de Parseval pour les séries de Fourier: $|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$, puisque: $\forall f \in L^2_{\text{per}}(\mathbb{T}), a_0(f) = \langle f, f_0 \rangle_{L^2_{\text{per}}}$, et $\forall n \geq 1, a_n(f) = \sqrt{n} \langle f, f_n \rangle_{L^2_{\text{per}}}$, $b_n(f) = \sqrt{n} \langle f, g_n \rangle_{L^2_{\text{per}}}$.

Dém: (i) La même décomposition dans une base hilbertienne et la formule de

Passeral qui s'annuit étendent à un espace de Hilbert séparable de dimension infinie les formules de décomposition dans une base orthonormée en dimension finie: la seule différence, et la principale complication, réside dans le fait de remplacer des sommes finies par des séries (ce qui est naturel en dimension infinie).

- (ii) L'exemple précédent relie la théorie générale des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie au cas particulier des séries de Fourier qui correspondent à l'espace de Hilbert $\ell^2_{\text{fin}}(\mathbb{S})$: les résultats sont identiques, et cet exemple est canonique au sens où il existe (à isomorphisme linéaire près) un unique espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Afin de démontrer cette affirmation, nous commencerons par établir le résultat suivant d'unicité du développement dans une base hilbertienne.

Chm: Supposons que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de cet espace.

- (i) Étant donnée une suite réelle ou complexe $(a_n)_{n \geq 0}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est convergente dans H si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

- (ii) Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. La somme x de la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est unique :

$$\forall n \geq 0, a_n = \langle x, e_n \rangle.$$

Dém: (i) Soit $\forall N \geq 0, S_N = \sum_{n=0}^N a_n e_n$; si la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est convergente et si x désigne sa somme, alors $S_N \rightarrow x$ dans H ; par continuité de la norme $\|S_N\|^2 \rightarrow \|x\|^2$; or $\|S_N\|^2 = \sum_{n=0}^N |a_n|^2$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ est convergente $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$; réciproquement, si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, comme $\forall N \geq n \geq 0, \|S_N - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^N |a_k|^2$, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H , donc est convergente dans $H \Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est convergente.

- (ii) Comme $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est convergente; par continuité des produits scalaires, $\forall n \geq 0, \langle S_N, e_n \rangle \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle$; or $\langle S_N, e_n \rangle = \sum_{k=0}^N a_k \langle e_k, e_n \rangle = a_n$ si $N \geq n$, à la limite $N \rightarrow +\infty$,

$$a_n = \langle x, e_n \rangle.$$

Ex (théorème de Riesz - Fischer): Supposons que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de cet espace.

Posons: $\forall x \in H, \Phi(x) = (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$. L'application Φ est bien définie de H dans $\ell^2(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{C})$, et réalise un isomorphisme linéaire entre ces deux espaces, qui est isométrique au sens où:

$$\forall x \in H, \|\Phi(x)\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2} = \|x\|.$$

Dém: Le fait que Φ soit bien définie de H sur $\ell^2(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{C})$ résulte de la formule de Parseval, de même que son caractère isométrique; l'application Φ est linéaire par linéarité ou sesquilinearité du produit scalaire de H ; par le théorème précédent, lorsque $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{C})$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n e_n$ est convergente dans H , et sa somme x satisfait $\Phi(x) = (a_n)_{n \geq 0}$, donc Φ est surjective; enfin, si $\Phi(x) = 0$, alors $\forall n \geq 0, \langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x \in \text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}^\perp$; comme $\text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}$ est dense dans H , $\text{Vect}(e_n)_{n \geq 0}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = 0$, d'où l'injectivité de Φ , puis le fait que il s'agit d'un isomorphisme linéaire.

Ex: Considérons l'espace de Hilbert $L^2_{\text{fin}}(\mathbb{C})$, et sa base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{C}, e_n(x) = e^{i n x}$. Rappelons que: $\forall f \in L^2_{\text{fin}}(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{Z}, \langle f, e_n \rangle_{L^2_{\text{fin}}} = c_n(f)$. Par le théorème précédent, l'application Φ définie par: $\forall f \in L^2_{\text{fin}}(\mathbb{C}), \Phi(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ réalise un isomorphisme linéaire isométrique entre $L^2_{\text{fin}}(\mathbb{C})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Théorème: (i) Le théorème de Riesz - Fischer signifie que tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie se ramène via le choix d'une base hilbertienne à l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{C})$: les calculs dans une base hilbertienne seront les mêmes que ceux réalisés dans l'espace $\ell^2(\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{C})$.

(ii) Néanmoins, le théorème de Riesz - Fischer ne signifie pas que tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont identiques au sens où leurs propriétés dépendent aussi des propriétés de la base hilbertienne dont ils sont munis.