CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Devoir surveillé

La durée de ce devoir est d'une heure et trente minutes. Les deux exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (2 points)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donner la définition des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction f.

2. Donner la définition réelle d'un polynôme trigonométrique 2π-périodique.

Exercice 1. (9 points)

Considérons la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = \begin{cases} -(x+\frac{\pi}{2}) \text{ si } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1.a. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b. Vérifier que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

d. Vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n\geq 1}$ de la fonction f.

b. Vérifier que

$$a_0(f) = \frac{\pi}{8}.$$

c. Montrer que

$$\forall k \geq 1,\ a_{2k}(f) = \frac{1-(-1)^k}{2\pi k^2}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0,\ a_{2k+1}(f) = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}.$$

d. En déduire la valeur de la série

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Exercice 2. (9 points)

Considérons la fonction 2π-périodique g définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ g(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ si } 0 < x < \pi, \\ 0 \text{ si } x = -\pi, 0 \text{ ou } \pi, \\ -\cos(x) \text{ si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

1.a. Représenter le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b. Vérifier que la fonction g est impaire sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

d. Vérifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n(g))_{n\geq 0}$ de la fonction g.

b. Vérifier que

$$\forall k \geq 1,\ b_{2k}(g) = \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0,\ b_{2k+1}(g) = 0.$$

c. Montrer que

$$\forall p \geq 0,\ \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = (-1)^p.$$

d. En déduire la valeur de la série

$$S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\,(2p+1)}{16p^2+16p+3}.$$