CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Devoir à la maison N°2

Considérons les polynômes de Legendre $(L_n)_{n\geq 0}$ définis par la formule de Rodrigues

$$\forall n \geq 0,\ L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\, P_n^{(n)}(X),$$

dans laquelle la notation $P_n^{(n)}$ désigne le polynôme dérivé d'ordre $n \geq 0$ du polynôme

$$P_n(X) = (X^2 - 1)^n.$$

1.a. Calculer les polynômes L_0, L_1 et L_2.

b. Soit P et Q deux polynômes réels. Vérifier la validité de la formule de Leibniz

$$\forall m \geq 0,\ \big[P\,Q\big]^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} P^{(k)} Q^{(m-k)}.$$

c. En déduire que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

d. Conclure que les polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

2.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ (X^2 - 1)P_n'(X) = 2nXP_n(X).$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 0,\ \big[(1 - X^2)\, L_n'(X)\big]' + n(n+1)L_n(X) = 0.$$

c. Montrer que

$$\forall m, n \geq 0,\ \int_{-1}^{1} (1 - x^2) L_m'(x) L_n'(x)\, dx = m(m+1) \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx.$$

d. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx = 0,$$

lorsque $m \neq n$.

e. Conclure que

$$\forall n \geq 1,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} L_n(x) P(x)\, dx = 0.$$

3.a. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

b. En déduire que

$$\forall n \geq 0,\ L_n(-1) = (-1)^n, \quad \text{et} \quad L_n(1) = 1.$$

c. Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ \int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} x\, L_n'(x)\, L_n(x)\, dx.$$

d. Vérifier que

$$\forall n \geq 0,\ P_{n+1}'(X) = 2(n+1)X\, P_n(X), \quad \text{et} \quad X\, L_n'(X) = L_{n+1}'(X) - (n+1)L_n(X).$$

e. En déduire que

$$\forall n \geq 1,\ \int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

f. Soit

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [-1,1],\ e_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, L_n(x).$$

Conclure que les fonctions polynômes $(e_n)_{n\geq 0}$ sont orthonormées dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

Nous admettons que le sous-espace $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[-1,1]$ est dense dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in L^2([-1,1],\mathbb{R})^2,\ \langle f,g\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

4.a. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, vérifier qu'il existe une fonction polynôme Q telle que

$$\sup_{x\in[-1,1]} \big|Q(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon.$$

b. Montrer que

$$\big\|Q - f\big\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\,\varepsilon.$$

c. En déduire que l'espace $\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions polynômes définies sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles est dense dans $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

d. Conclure que la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

5.a. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Vérifier qu'il existe des nombres réels uniques α, β et γ tels que

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - a - bx - cx^2\Big)^2 dx \geq \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x)\Big)^2 dx.$$

b. Vérifier que

$$\alpha = \langle f, e_0\rangle_{L^2}, \quad \beta = \langle f, e_1\rangle_{L^2}, \quad \text{et} \quad \gamma = \langle f, e_2\rangle_{L^2}.$$

c. Conclure que

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - a - bx - cx^2\Big)^2 dx \geq \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx - \langle f, e_0\rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_1\rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_2\rangle_{L^2}^2.$$

d. *Application.* Montrer que

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \Big(\cos(\pi x) - a - bx - cx^2\Big)^2 dx = 1 - \frac{90}{\pi^4}.$$