CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

Devoir à la maison N°2

Considérons l'espace de Hilbert réel

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \Big\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \sum_{n\geq 0} u_n^2 \text{ est convergente}\Big\},$$

muni du produit scalaire réel

$$\forall (u,v) \in \ell^2(\mathbb{N})^2,\ \langle u, v\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, v_n.$$

Exercice 1. *L'opérateur de décalage.*

1. Étant donné un entier $p \geq 0$, posons

$$\forall n \geq 0, e_n^p = \begin{cases} 1, \text{ si } n = p, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

a. Vérifier que la suite e^p appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ et calculer sa norme $\|e^p\|_{\ell^2}$.

b. En déduire que la famille des suites $(e^p)_{p\geq 0}$ est orthonormée dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

c. Montrer que la famille des suites $(e^p)_{p\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2. Étant donnée une suite réelle $u = (u_n)_{n\geq 0}$, considérons la suite $\delta(u)$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ \delta(u)_n = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 0, \\ u_{n-1}, \text{ si } n \geq 1, \end{cases}$$

et introduisons l'opérateur de décalage δ qui, à une suite u de $\ell^2(\mathbb{N})$, associe la suite $\delta(u)$.

a. Vérifier que cet opérateur est bien défini, linéaire et continu de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Déterminer le noyau de l'opérateur de décalage δ. Cet opérateur est-il injectif ?

c. Montrer que

$$\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Vect}\big(e^0\big)^{\perp}.$$

L'opérateur δ est-il surjectif ?

3.a. Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu τ de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ tel que

$$\tau(e^0) = 0, \quad \text{et} \quad \forall p \geq 1,\ \tau(e^p) = e^{p-1}.$$

b. Vérifier que

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \tau\big(\delta(u)\big) = u.$$

L'opérateur τ est-il surjectif ?

c. L'opérateur δ est-il inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

4.a. Vérifier que τ est l'opérateur adjoint de l'opérateur δ, c'est-à-dire que

$$\forall (u,v) \in \ell^2(\mathbb{N})^2,\ \big\langle \delta(u), v \big\rangle_{\ell^2} = \big\langle u, \tau(v) \big\rangle_{\ell^2}.$$

b. En déduire que

$$\operatorname{Ker}(\tau) = \operatorname{Im}(\delta)^\perp.$$

L'opérateur τ est-il injectif ?

Exercice 2. *Le spectre de l'opérateur adjoint.*

Notons I l'opérateur identité défini par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ I(u) = u,$$

et introduisons le spectre de l'opérateur τ défini par

$$\sigma(\tau) = \big\{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \tau - \lambda I \text{ n'est pas bijectif} \big\}.$$

1.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ tel que

$$\tau(u) = \lambda u.$$

Vérifier qu'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \alpha \lambda^n.$$

b. En déduire que l'opérateur $\tau - \lambda I$ est injectif si et seulement si $|\lambda| \geq 1$.

2.a. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $|\mu| > 1$. Étant donnée une suite $v = (v_n)_{n \geq 0}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$, considérons la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ u_n = - \sum_{k=n}^{+\infty} \mu^{n-k-1}\, v_k.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et qu'elle satisfait

$$\forall n \geq 0,\ u_n^2 \leq \frac{1}{|\mu| - 1} \sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} v_k^2.$$

b. Vérifier que la série double $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} v_k^2)$ est convergente, et que sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} v_k^2 \Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - |\mu|^{-k-1}}{|\mu| - 1}\, v_k^2.$$

c. En déduire que la suite u appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, et qu'elle satisfait

$$\tau(u) - \mu u = v.$$

d. L'opérateur $\tau - \mu I$ est-il surjectif ? Est-il bijectif ?

3.a. Vérifier que la suite $w = (1/(n+1))_{n \geq 0}$ appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Montrer qu'il n'existe pas de suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\tau(u) - u = w.$$

c. Déterminer une suite $z \in \ell^2(\mathbb{N})$ qui n'appartient pas à l'image de l'opérateur $\tau + I$.

d. Conclure que

$$\sigma(\tau) = [-1, 1].$$