CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Devoir à la maison N°1

Exercice 1.

1. Étant donné un nombre $t \in \mathbb{R}$, considérons la fonction F définie par

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2+2\,x\,\sin(t)}.$$

a. Vérifier que la fonction F est bien définie sur $]-1,1[$ et qu'elle satisfait

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = -1 + \frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} + \frac{ie^{-it}}{ie^{-it}+x}.$$

b. Montrer que

$$\frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n e^{-int} x^n.$$

c. En déduire que

$$\forall -1 < x < 1,\ F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n e^{-int} + e^{int}\right) i^n\, x^n.$$

2.a. Soit $0 \leq \theta < \pi/2$. Vérifier que

$$\cos(\theta) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

b. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction h_θ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_\theta(t) = \frac{1}{1+\sin(\theta)\,\sin(t)}.$$

c. Soit $m \geq 0$ et $n \geq 1$. En déduire la valeur des intégrales I_m et J_n définies par

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(mt)\,dt}{2+\sqrt{3}\,\sin(t)}, \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)\,dt}{2+\sqrt{3}\,\sin(t)}.$$

Exercice 2.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{ix^2}.$$

1.a. Montrer que

$$\forall R > 1,\ \int_1^R f(x)\,dx = \int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

b. Vérifier que

$$\int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{e^{iR^2}}{iR} - \frac{e^i}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

c. En déduire qu'il existe un nombre complexe ℓ tel que

$$\int_{-R}^{S} f(x)\,dx \underset{R,S\to+\infty}{\to} \ell.$$

Nous cherchons désormais à déterminer la valeur de l'intégrale généralisée

$$\ell = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}\,dx.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ g(x) = e^{\frac{ix^2}{2\pi}}.$$

a. Vérifier que la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i(x-\pi n)^2}{2\pi}}\,dx.$$

c. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -i \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

d. En déduire que

$$\forall N \geq 0,\ \sum_{k=-2N-1}^{2N+1} c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-2(N+1)\pi}^{2(N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\,dx.$$

e. Conclure que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(1+i\big).$$