CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2023-2024**

Devoir à la maison N°1

Exercice 1.

Soit $\alpha > 0$. Considérons la fonction f_α définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(x)}.$$

1.a. Vérifier que la fonction f_α est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\alpha)}\Big(\frac{1}{1 - e^{ix-\alpha}} + \frac{e^{-ix-\alpha}}{1 - e^{-ix-\alpha}}\Big).$$

2.a. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1 - e^{ix-\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} e^{inx}.$$

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\alpha)}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\alpha}\cos(nx)\Big).$$

3.a. Quelle est la valeur des coefficients de Fourier $(b_n(f_\alpha))_{n\geq 1}$ de la fonction f_α ?

b. Vérifier que les coefficients de Fourier $(a_n(f_\alpha))_{n\geq 0}$ de la fonction f_α sont égaux à

$$a_0(f_\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a_n(f_\alpha) = \frac{2\,e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh}(\alpha)}.$$

c. En déduire la valeur des intégrales

$$I_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(x)}, \quad \text{et} \quad J_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{\big(\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(x)\big)^2}.$$

Exercice 2. *Convolution de fonctions périodiques.*

Soit $\mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

1.a. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$. Considérons le produit de convolution $f * g$ donné par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)\, g(y)\, dy.$$

Montrer que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ \forall y \in [-\pi, \pi],\ \big|f(x-y)g(y) - f(x_0 - y)g(y)\big| < \varepsilon.$$

c. En déduire que le produit de convolution $f * g$ est continu sur $\mathbb{R}$.

2. Soit

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e_n(x) = e^{inx}.$$

a. Vérifier que les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ satisfont

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ e_n * f = c_n(f)\, e_n.$$

b. En déduire que le produit de convolution ne possède aucun élément neutre, soit qu'aucune fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ne satisfait

$$\forall g \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ g * f = g.$$

3.a. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g).$$

b. Soit $h \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\big(f * (g * h)\big) = c_n\big((f * g) * h\big).$$

c. Conclure que le produit de convolution est associatif, soit que

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

d. Le produit de convolution est-il commutatif, c'est-à-dire satisfait-il

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2,\ f * g = g * f\ ?$$

4.a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ e_n * e_n = e_n.$$

b. En déduire l'ensemble des solutions $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de l'équation

$$f * f = f.$$

5. *Application.* Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = |x|.$$

a. Vérifier que la fonction f est bien définie, paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction f.

c. Montrer que la fonction $f * f$ est paire et qu'elle satisfait

$$\forall x \in [0, \pi],\ f * f(x) = \frac{1}{6\pi}\Big(2x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^3\Big).$$

d. En déduire la valeur de la série

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^8}.$$