

Ex 3 : Transformation de Fourier

I(i) $\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, et: $\forall s \neq 0$, $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-ixs} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(s)}{s}$.

(ii) $\hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 (2-|x|) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, et: $\forall s \neq 0$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-2}^0 (2+x) e^{-ixs} dx + \int_0^2 (2-x) e^{-ixs} dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\cos(s)}{s^2}$.

II.1. $\hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et $\forall s \neq 0$, $\hat{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} e^{-ixs} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{s}{2})}{s}$.

2. $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{h}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\frac{t-s}{2}) e^{-itx} dt = 2 e^{-is} \hat{h}(-2s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-is} \sin(s)}{s}$
 $\neq 0$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin s = 0$; $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{h}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) e^{-ixs} dx = i \hat{h}(s)' = \frac{i}{\sqrt{2\pi} s^2}$
 $(\frac{s}{2} \cos(\frac{s}{2}) - 2 \sin(\frac{s}{2})) \sin s \neq 0$, $0 \sin s = 0$; $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{h}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x) e^{-ixs} dx = -\hat{h}''(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s^3} [s^2 \sin(\frac{s}{2}) + 4s \cos(\frac{s}{2}) - 8 \sin(\frac{s}{2})] \sin s \neq 0$, $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \sin s = 0$.

III.1. $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{p}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(a-is)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(b+is)x} dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+s^2}$.

2. D'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_1(x) \Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_1(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_2(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{p}_2(s)$
 $= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{1+t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{g}(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$
 $(\frac{1}{1+t^2})' dt = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4} x e^{-|x|}$; soit $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\phi(t,x) = \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}$;
 ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, avec: $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\partial_t \phi(t,x) = \frac{-t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $|\partial_t \phi(t,x)| + |\partial_x \phi(t,x)| \leq \frac{1+t}{(1+t^2)^2}$; comme $\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{(1+t^2)^2} dt < +\infty$, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, I_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et: $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_2'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$
 $dt = -I_2(x) = -\frac{\pi}{4} x e^{-|x|} \Rightarrow \forall x > 0$, $I_2(x) = I_2(0) - \frac{\pi}{4} \int_0^x y e^{-y} dy = I_2(0) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (x+2)e^{-x}$
comme $I_2(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4}$, $\forall x > 0$,
 $I_2(x) = \frac{\pi}{4} (x+2) e^{-x}$; sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_2(-x) = I_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_2(x) = \frac{\pi}{4} e^{-|x|}$
 $(2+|x|)$.

III.2.a. Par les opérations élémentaires, g_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n'(x) = -2 + x g_n(x)$.

b. Comme g_n et g_n' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_n(s) = i s \hat{g}_n(s)$; d'après la question 2.a, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_n(s) = -2s \int_{-\infty}^{+\infty} x g_n(x) e^{-isx} dx$, d'où par le théorème de dérivation

- sous le signe intégral, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'_-(s) = -2si \hat{f}'_-(s) \Rightarrow \hat{f}'_-(s) = -\frac{s}{2i} \hat{f}_-(s)$.
- 1.a. Soit $\forall (t, x) \in (0, 2) \times \mathbb{R}$, $H(t, x) = \frac{e^{-(2+t^2)x^2}}{2+t^2}$; H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, 2) \times \mathbb{R}$, avec $\forall (t, x) \in (0, 2) \times \mathbb{R}$, $\partial_x H(t, x) = -2x e^{-(2+t^2)x^2} \Rightarrow h$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -2 \int_0^2 x e^{-(2+t^2)x^2} dt \stackrel{u=tx}{=} -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$.
- b. $h(0) = \int_0^2 \frac{dt}{2+t^2} = \arctan(2) = \frac{\pi}{4}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq e^{-x^2} \int_0^2 \frac{dt}{2+t^2} \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \Rightarrow h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- c. D'après la question 1.a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \Rightarrow h(x) = h(0) - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$; par positivité, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- d. D'après la question 1.c, $\hat{g}_-(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; d'après la question 1.b, $\forall s \in \mathbb{R}$, $(\hat{g}_-(s) e^{\frac{s^2}{4}})' = (\hat{g}'_-(s) + \frac{s}{2} \hat{g}_-(s)) e^{\frac{s^2}{4}} = 0 \Rightarrow \hat{g}'_-(s) e^{\frac{s^2}{4}} = -\frac{s}{2} \hat{g}_-(s) \Rightarrow \hat{g}_-(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}$.

- II.1. $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}+is)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(\sqrt{2}-is)x} dx \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(s^2+2)}$.
2. a. Comme $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{\phi}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s) = \frac{2\sqrt{2}}{s^2+2} \hat{f}(s)$; sachant que $\forall s \in \mathbb{R}$, $(e^{-\frac{s^2}{4}})'(s) = -\frac{s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}}$, $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (s^2+2) e^{-\frac{s^2}{4}}$.
- b. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$; comme $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{g}'(s) = -s^2 \hat{g}(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f}'(s) - \hat{g}'(s))$; par injectivité de la transformation de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (g(x) - \frac{1}{2} g''(x)) = \sqrt{2} (2-x^2) e^{-x^2}$.

- II.2. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(x-t)^2} dt = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2+2tx} dt = 0$.
2. Comme $(f, g) \in L^2(\mathbb{R})^2$, $\forall p, q \in \mathbb{R}$, $\hat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s) \Rightarrow \hat{f}(s) \hat{g}(s) = 0$; comme $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(s) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}} \neq 0$, $\forall p, q \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(s) = 0$.
3. D'après la question 2, par injectivité de la transformation de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

VII 1.1. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, $f'' = f - g \in L^2(\mathbb{R})$.

- b. Sachant que f, f' et f'' sont dans $L^2(\mathbb{R})$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}''(s) = -s^2 \hat{f}(s)$; comme $f'' = f - g$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $(2+s^2) \hat{f}(s) = \hat{g}(s) \Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{\hat{g}(s)}{2+s^2}$.
- c. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}$; $h \in L^2(\mathbb{R})$, avec $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(s) = \frac{1}{2+s^2}$; d'après la question 1.b, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(s) = \hat{h}(s) \hat{g}(s)$; comme $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

et $h \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g \star h(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-|x-y|} dy$.

1. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-|x-y|} dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x g(y) e^{+y} dy \right) e^{-x} + \frac{1}{2} \left(\int_x^{+\infty} g(y) e^{-y} dy \right) e^x$; comme $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, f est bien définie et de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} g(y) e^{-y} dy - \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x g(y) e^{+y} dy \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{E}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -g(x) + \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} g(y) e^{-y} dy + \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x g(y) e^{+y} dy = f(x) - g(x)$; de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx < +\infty \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx < +\infty \Rightarrow f' \in L^2(\mathbb{R})$, d'où l'existence d'une unique solution $f \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R})$ t.q. $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

III.1. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} e^{-i\xi t} dt$ sont bien définies pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx = \int_0^{+\infty} [f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})] e^{-i\xi t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} e^{-i\xi t} dt$.

2. $\Rightarrow$ Si f est impair, alors, p.p.t. $t \geq 0$, $f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} e^{-i\xi t} dt = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx = 0$.

$\Leftarrow$ Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x^2} dx = 0$, alors : $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} e^{-i\xi t} dt = 0$; par injectivité de la transformation de Fourier, p.p.t. $t \geq 0$, $f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}) = 0 \Rightarrow$ p.p.t. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f$ est impair.

IX.1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 (1+x^2) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right) < +\infty \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$; de même, $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 (1+x^2) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right) < +\infty \Rightarrow f' \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

1.a. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x f(x) f'(x)| \leq \frac{1}{2} [x^2 f(x)^2 + f'(x)^2]$, $x \mapsto x f(x) f'(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx$ sont bien définies, avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)^2 + 2x f(x) f'(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [x f(x)^2]' dx$; comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) f(x)^2 dx < +\infty$, il existe $S_n \rightarrow -\infty$ et $R_n \rightarrow +\infty$ t.q. $S_n f(S_n)^2 \rightarrow 0$ et $R_n f(R_n)^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} [x f(x)^2]' dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{S_n}^{R_n} [x f(x)^2]' dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} [R_n f(R_n)^2 - S_n f(S_n)^2] = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx$.

b. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question 1.a, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

c. D'après la question 1, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$; comme $f' \in L^2(\mathbb{R})$, par le théorème de Plancherel, $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}'(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^2 d\xi$, d'où d'après la question

$$2b, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.a. Au rang $n=0$, $H_0=1$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} = (-2)^0 H_0(x) e^{-x^2}$; supposons que $\forall 0 \leq h \leq n, \exists ! H_h \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^h}{dx^h} (e^{-x^2}) = (-2)^h H_h(x) e^{-x^2}$; au rang $n+1$, $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) = [(-2)^n H_n(x) e^{-x^2}]' = (-2)^{n+1} (2x H_n(x) - H_n'(x)) e^{-x^2}$ $\Rightarrow H_{n+1} = 2x H_n - H_n'$ courrant, et si $L \in \mathbb{R}[X]$ satisfait aussi cette identité, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, L(x) e^{-x^2} = H_{n+1}(x) e^{-x^2} \Rightarrow L = H_{n+1}$, d'où l'existence et l'unicité de L par récurrence sur $n \geq 0$.

b. Par récurrence sur $n \geq 0$, $\forall n \geq 0, H_n = 2^n x^n + \dots \Rightarrow d^0(H_n) = n$.

2. a. Comme il existe $C_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |\Phi_n(x)| \leq \frac{C_n}{2+x^2}$, $\Phi_n \in L^2(\mathbb{R})$.

b. Soit $\forall n \geq 0, \lambda_n = \frac{2}{(2^n \sqrt{\pi} n!)^{\frac{1}{2}}}$; $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_{L^2} = \lambda_n \lambda_m \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$; d'après la question 2.a, $\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_{L^2} = \lambda_n \lambda_m (-2)^m \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2})^{(m)} H_n(x) dx$; en intégrant par parties m fois, $\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_{L^2} = \lambda_n \lambda_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m}{dx^m} H_n(x) e^{-x^2} dx$; comme $d^0(H_n) = n$ par la question 2.a, si $m > n$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, H_n^{(m)}(x) = 0 \Rightarrow \langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_{L^2} = 0$, et par symétrie, si $m < n$, alors, $\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_{L^2} = 0$; si $m = n$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$ $\Rightarrow \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{L^2} = 2^n \lambda_n^2 n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2^n n!}{2^n \sqrt{\pi} n!} \sqrt{\pi} = 1$ $\Rightarrow (\Phi_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $\forall n \geq 0, R_n^f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} x^k \in \mathbb{C}[X]$; $\forall x \in \mathbb{R}, R_n^f(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-i^5 x}$, et $|R_n^f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|i^5 x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|i^5 x|^k}{k!} = e^{|i^5 x|}$.

4. a. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ $< +\infty \Rightarrow g \in L^2(\mathbb{R})$.

b. D'après la question 2.b, $\forall n \geq 0, d^0(H_n) = n \Rightarrow (H_n)_{n \geq 0}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$; si $Q_n^f(x) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left(\frac{(-i)^k}{k!} \right) x^k$ et $R_n^f(x) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} \left(\frac{(-i)^k}{k!} \right) x^k$, alors, Q_n^f et R_n^f appartiennent à $\operatorname{Vect}(H_n)_{n \geq 0}$; comme $\forall n \geq 0, \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{L^2} = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \Phi_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n^f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R_n^f(x) g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R_n^f(x) g(x) dx$; comme $\forall x \in \mathbb{R}, R_n^f(x) g(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-i^5 x} g(x)$, et $|R_n^f(x) g(x)| \leq e^{|i^5 x|} |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|i^5 x|} |g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2|i^5 x| - x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, par le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} R_n^f(x) g(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i^5 x} g(x) dx = \sqrt{2\pi} \hat{g}(\frac{1}{i^5}) \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = 0$.

c. Par la question 4.a, et par injectivité de la transformation de Fourier, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{g}(\xi) = 0$.

$g(x) = 0 \Rightarrow \hat{f}(x) = 0 \Rightarrow f$ est identiquement nulle.

a. D'après la question 1.a, $\text{Vect}(\varphi_n) = \{0\} \Rightarrow \text{Vect}(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$; comme $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ par la question 1.b, $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

II.1.a. Soit $\varepsilon > 0$, $\forall |n| \geq 2, \forall x \in (-R, R), |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + (x + 2n\pi)^2} \leq \frac{\varepsilon}{1 + (2|n|\pi - R)^2}$; comme $\sum_{|n| \geq 2} \frac{1}{1 + (2|n|\pi - R)^2}$ est convergente, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ converge normalement sur $(-R, R)$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$; de même, $\forall |n| \geq 2, \forall x \in (-R, R), |f'(x + 2n\pi)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + (2|n|\pi - R)^2} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + 2n\pi)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b. Comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + 2n\pi)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, F est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et: $\forall x \in \mathbb{R}, F(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2(n+1)\pi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2m\pi) = F(x) \Rightarrow F$ est 2π -périodique.

2.a. Par convergence normale de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ sur $(-\pi, \pi)$, $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + 2n\pi) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-i(n-2n)\pi} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(n)$.

b. Comme F est de classe C^1 et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Dirichlet, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$, d'où par la question 2.a, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$.

III.1.a. Comme $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact, $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$; comme elle est à support compact, elle est dans $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(s)| ds \Rightarrow f$ est bornée; comme $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Comme $\forall |s| \geq \pi, \hat{f}(s) = 0, \forall |s| \geq \pi, \hat{f}'(s) = \hat{f}''(s) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(s) e^{isx} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\hat{f}(s) \frac{e^{isx}}{ix} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}'(s) \frac{e^{isx}}{ix} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\hat{f}(s) \frac{e^{isx}}{(ix)^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}''(s) \frac{e^{isx}}{(ix)^2} ds = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}''(s) e^{isx} ds$.

c. D'après la question 1.b, $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}''(s) e^{isx} ds$; amène à la question 2.a, $\hat{f}'' \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow |x^2 f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}''(s)| ds$; sachant que f est bornée par la question 2.a, il existe $C \geq 0$ s.g. $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1 + x^2}$.

2.a. Comme $\hat{f}$ et $\hat{f}'$ sont continues à support compact sur $\mathbb{R}$, les fonctions $(1 + s^2) \hat{f}(s)$

et $f \mapsto (1+s^2)^{-1} \hat{f}(s)$ sont bornés sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ il existe $C \geq 0$ t.p. $\forall s \in \mathbb{R}, |\hat{f}(s)| + |\hat{f}'(s)| \leq \frac{C}{1+s^2}$.

b. Par la question 2.a, la formule sommatoire de Poisson assure que: $\forall s \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{ins}$; comme f et $\hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = f(-n) \Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{ins}.$$

c. Lorsque $|s| \leq \pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $|s+2n\pi| \geq |2n\pi| - |s| \geq 2\pi - |s| \geq \pi$.

d. Comme $\forall |s| \geq \pi, \hat{f}(s) = 0$, $\forall s \in (-\pi, \pi)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\hat{f}(s+2n\pi) = 0 \Rightarrow$

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s+2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{ins} \stackrel{n=-n}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-ins}$$

3.a. Comme f et $\hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds$;

sachant que $\forall |s| \geq \pi, \hat{f}(s) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(s) e^{isx} ds$,

puis d'après la question 2.d, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{is(x-n)} ds$.

b. Si $x = n$, alors, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{is(x-n)} ds = 1$, et si $x \neq n$, alors $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{is(x-n)} ds = \frac{e^{is(x-n)}}{2\pi i(x-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$.

c. Comme $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|f(n) e^{is(x-n)}| = |f(n)| \leq \frac{C}{1+n^2}$ par la question 2.c, et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}$ est convergente, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{is(x-n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi, \pi]$.

d. D'après les questions 3.a et 3.c, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{is(x-n)} ds$, d'où par la question 3.b, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$.