GRAVEJAT Philippe

L3

27/10/22

TD N°2 : Espaces de Hilbert

I 1. $\langle y,x\rangle = \frac{1}{2}\left[\|y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \langle x,y$.

2.a. Comme $\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) - \|x+y\|^2$, $\langle -x,y\rangle = \frac{1}{2}\left[\|y-x\|^2 - \|-x\|^2 - \|y\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\|^2\right] = -\langle x,y\rangle$; $\langle x,2y\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+2y\|^2 - \|x\|^2 - 4\|y\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[2\|x+y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y-y\|^2 - \|x\|^2 - 4\|y\|^2\right] = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x,y\rangle$.

b. Comme $\|x+y+z\|^2 = 2\|x+\frac{z}{2}\|^2 + 2\|y+\frac{z}{2}\|^2 - \|y-x\|^2$, $\langle x+y,z\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2 - \|z\|^2\right] = \|x+\frac{z}{2}\|^2 + \|y+\frac{z}{2}\|^2 - \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 + \|y-x\|^2\right] - \frac{1}{2}\|z\|^2 = \|x+\frac{z}{2}\|^2 + \|y+\frac{z}{2}\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\|\frac{z}{2}\|^2 = 2\langle x,\frac{z}{2}\rangle + 2\langle y,\frac{z}{2}\rangle \overset{2.a}{=} \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

3.a. D'après la question 2.b, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$; d'après la question 2.a, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle \Rightarrow n\langle \frac{x}{n},y\rangle = \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle \frac{x}{n},y\rangle = \frac{1}{n}\langle x,y\rangle \Rightarrow \forall q = \frac{p}{r} \in \mathbb{Q}^*$, $\langle \frac{p}{q}x,y\rangle = \frac{p}{r}\langle x,y\rangle$, et $\langle 0,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|y\|^2 - \|y\|^2\right) = 0$; soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(q_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ t.q. $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$; $|\langle q_n x,y\rangle - \langle \lambda x,y\rangle| = \frac{1}{2}\left|\|q_n x+y\|^2 - \|\lambda x+y\|^2 + (\lambda^2 - q_n^2)\|x\|^2\right| \leq \frac{1}{2}\left[\left(\|q_n x+y\| + \|\lambda x+y\|\right)\left|\|q_n x+y\| - \|\lambda x+y\|\right| + |\lambda^2 - q_n|^2\|x\|^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[\left(|q_n|\,\|x\| + \|y\| + \|\lambda x+y\|\right)|q_n - \lambda|\,\|x\| + |\lambda^2 - q_n|^2\|x\|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; comme $\forall n \geq 0$, $\langle q_n x,y\rangle = q_n\langle x,y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\langle x,y\rangle$, $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.

b. D'après les questions 1, 2b et 3a, $\langle\, ,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $\forall x \in E$, $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$; comme $\|\ \|$ est une norme sur E, $\langle\, ,\rangle$ est définie positive $\Rightarrow$ $\langle\, ,\rangle$ est un produit scalaire sur E de norme associée $\|\ \|$.

II 1. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - y_n\|_H^2 = \|x_n\|_H^2 + \|y_n\|_H^2 - 2\langle x_n,y_n\rangle_H$, $0 \leq \|x_n - y_n\|_H^2 \leq 2\left(1 - \langle x_n,y_n\rangle_H\right)$; sachant que $\langle x_n,y_n\rangle_H \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, par le lemme des gendarmes $\|x_n - y_n\|_H^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans H.

2. Par l'identité du parallélogramme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|x_n - y_n\|_H^2 \leq 2\left(\|x_n\|_H^2 + \|y_n\|_H^2\right) - \|x_n + y_n\|_H^2 \leq 4 - \|x_n + y_n\|_H^2$; sachant que $\|x_n + y_n\|_H^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$, $\|x_n - y_n\|_H^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

III 1.a. Comme $\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda a + b)^2 \leq 2\lambda^2 a^2 + 2b^2$, $(\lambda a_n + b_n)_{n \geq 0}$ appartient à $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ lorsque $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{N})$; si $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et si $\forall N \geq 0$, $\forall n \geq 0$, $a_n^N = a_n$ si $0 \leq n \leq N$, 0 sinon, alors les suites $(a_n^N)_{n \geq 0}$ sont dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ et : $\forall N \geq 0$, $\| a^N - a \|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \Rightarrow a^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} a$ dans $\ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Si $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est un sous-ensemble complet de $\ell^2(\mathbb{N})$, alors, toute suite convergente de $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$, donc a une limite dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$; comme $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$, $\mathcal{H}^2(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N})$; comme la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$ mais pas dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$, c'est absurde ! $\Rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ n'est pas un sous-ensemble complet de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2.a. Comme $\forall n \geq 0$, $(1+n^2)|a_n b_n| \leq \frac{1+n^2}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, la série $\sum_{n \geq 0} (1+n^2) a_n b_n$ est absolument convergente, donc convergente, lorsque $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \langle\, , \rangle_{\mathcal{H}^2}$ est bien défini sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})^2$; par définition, $\langle\, , \rangle_{\mathcal{H}^2}$ est bilinéaire symétrique, et $\forall (a_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{N})$, $\langle a, a \rangle_{\mathcal{H}^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2) a_n^2 \geq 0$; de plus, cette quantité est nulle ssi $\forall n \geq 0$, $a_n = 0 \Rightarrow \langle\, , \rangle_{\mathcal{H}^2}$ est définie positive $\Rightarrow \langle\, , \rangle_{\mathcal{H}^2}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$.

b. Considérons une suite de Cauchy $(a^N)_{N \geq 0}$ de $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists L \geq 0$ t.q. $\forall M \geq L$, $\forall N \geq L$, $\| a^N - a^M \|^2_{\mathcal{H}^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2)(a_n^N - a_n^M)^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow$ les suites $(\sqrt{1+n^2}\, a_n^N)_{n \geq 0}$ forment une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N})$; comme $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet, il existe $(\alpha_n^\infty)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que $(\sqrt{1+n^2}\, a_n^N)_{n \geq 0} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \alpha_n^\infty$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$; soit alors $\forall n \geq 0$, $a_n^\infty = \frac{\alpha_n^\infty}{\sqrt{1+n^2}}$; comme $(\alpha_n^\infty)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} (1+n^2)(a_n^\infty)^2 = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} (\alpha_n^\infty)^2 < +\infty \Rightarrow (a_n^\infty)_{n \geq 0} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ et $\| a_n^N - a_n^\infty \|^2_{\mathcal{H}^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{1+n^2}\, a_n^N - \alpha_n^\infty)^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \Rightarrow (a_n^N)_{n \geq 0} \xrightarrow[N \to +\infty]{} (a_n^\infty)_{n \geq 0}$ dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ $\Rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{N})$ est complet, donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\, , \rangle_{\mathcal{H}^2}$

IV 1. Comme $\forall x \geq 0$, $|f(x) g(x) e^{-x}| \leq \frac{1}{2}[f(x)^2 e^{-x} + g(x)^2 e^{-x}]$, la fonction $x \mapsto f(x) g(x) e^{-x}$ est intégrable lorsque f et g sont dans $H \Rightarrow \langle\, , \rangle_H$ est bien défini sur $H \times H$; par définition, $\langle\, , \rangle_H$ est bilinéaire symétrique, et $\forall f \in H$, $\langle f, f \rangle_H = \int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-x} dx \geq 0$; de plus, cette quantité est nulle ssi pp $x \geq 0$, $f(x)^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

$\langle\, , \rangle_H$ est définie positive $\Rightarrow \langle\, , \rangle_H$ est un produit scalaire sur H.

2.a. Par définition, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 0$ t.q. $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_H^2 = \int_0^{+\infty} (f_n(x) - f_m(x))^2 e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} (g_n(x) - g_m(x))^2\, dx \leq \varepsilon^2$; comme $\forall n \geq 0$, $g_n \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $(g_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}_+)$.

b. Comme $L^2(\mathbb{R}_+)$ est complet, il existe $g_\infty \in L^2(\mathbb{R}_+)$ t.q. $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_\infty$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$; soit alors $\forall x \geq 0$, $f_\infty(x) = g_\infty(x)\, e^{\frac{x}{2}}$; comme $g_\infty \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f_\infty \in H$, et $\forall n \geq 0$, $\|f_n - f_\infty\|_H^2 = \int_0^{+\infty} (f_n(x) - f_\infty(x))^2 e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} (g_n(x) - g_\infty(x))^2\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_\infty$ dans $H \Rightarrow H$ est complet, donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\, , \rangle_H$.

V (i) Considérons l'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire : $\forall (f,g) \in L^2([-1,1])^2$, $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$, et posons : $E = \{ f \in L^2([-1,1], \mathbb{R})$ t.q. il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = ax^2 + bx + c \}$; E est un sous-espace de dimension finie de $L^2([-1,1])$, donc est fermé dans $L^2([-1,1])$; soit alors p_E la projection orthogonale sur E ; notons $\forall x \in [-1,1]$, $g(x) = x^3$; $\forall f \in E$, $\|g - f\|^2 = \|g - p_E(g) + p_E(g) - f\|^2 = \|g - p_E(g)\|^2 + \|p_E(g) - f\|^2 \geq \|g - p_E(g)\|^2$, d'où par définition, $\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} J(a,b,c) = \|g - p_E(g)\|^2$.

(ii) Par définition, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $\forall x \in [-1,1]$, $p_E(g)(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, et $\forall f \in E$, $\langle g - p_E(g), f \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma)\, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x)\, dx = \int_{-1}^{1} (x^5 - \alpha x^4 - \beta x^3 - \gamma x^2)\, dx = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\alpha - 2\gamma = \frac{2}{5} - \frac{2\beta}{3} = -\frac{2}{5}\alpha - \frac{2\gamma}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 0$ et $\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow p_E(g)(x) = \frac{3x}{5}$, et $\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} J(a,b,c) = \frac{8}{175}$.

VI 1. Comme $B_f(a,R)$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de H, $d(x, B_f(a,R)) = \|x - p(x)\|_H$, où p désigne la projection sur la boule $B_f(a,R)$, qui est caractérisée par l'inégalité $\forall y \in B_f(a,R)$, $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle_H \leq 0$; si $x \in B_f(a,R)$, alors $p(x) = x$ et $d(x, B_f(a,R)) = 0$; si $x \notin B_f(a,R)$, alors $z = a + \frac{R}{\|x-a\|_H}(x-a)$ satisfait : $\langle x - z, z\rangle_H = \left(1 - \frac{R}{\|x-a\|_H}\right) \langle x - a, a + \frac{R}{\|x-a\|_H}(x-a)\rangle_H = \left(1 - \frac{R}{\|x-a\|_H}\right)\left(R\|x-a\|_H + \langle a, x-a\rangle_H\right)$, et $\forall y \in B_f(a,R)$, $\langle x - z, y\rangle_H = \left(1 - \frac{R}{\|x-a\|_H}\right) \langle x - a, a + y - a\rangle_H \leq \left(1 - \frac{R}{\|x-a\|_H}\right)\left(\langle a, x-a\rangle_H + R\|x-a\|\right) \leq \langle x - z, z\rangle_H \Rightarrow p(x) = z = a + \frac{R}{\|x-a\|_H}(x-a) \Rightarrow d(x, B_f(a,R)) = \left(1 - \frac{R}{\|x-a\|_H}\right)\|x-a\|_H = \|x-a\|_H - R$.

2. Par définition, $d(B_f(a,R), F) = \inf_{x\in F} d(x, B_f(a,R)) = \inf_{x\in F_N} \max\{\|x-a\|_H - R, 0\}$; si $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i \in F$, alors $\|x - a\|_H^2 = \|\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i - a\|_H^2 = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i\langle e_i, a\rangle_H) + \|a\|_H^2$;

comme la fonction trinôme $t \mapsto t^2 - 2t\langle e_i, a\rangle_H$ atteint son minimum $t = \langle e_i, a\rangle_H$, $\forall 1 \le i \le N$, $\lambda_i^2 - 2\lambda_i \langle e_i, a\rangle_H \geq -\langle e_i, a\rangle_H^2$, $\|x-a\|_H^2 \geq \|a\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, a\rangle_H^2$ $\Rightarrow \|x-a\|_H - R \geq \left(\|a\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, a\rangle_H^2\right)^{\frac{1}{2}} - R$, et cette valeur minimale est atteinte pour $\forall 1 \le i \le N$, $\lambda_i = \langle e_i, a\rangle_H$; si cette valeur est négative, alors il existe $x \in E$ t.q. $x \in B_f(a,R) \Rightarrow d(E, B_f(a,R)) = 0$; sinon, $\inf_{x \in E} \max\{\|x-a\|_H - R, 0\} = \left(\|a\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, a\rangle_H^2\right)^{\frac{1}{2}} - R \Rightarrow d(E, B_f(a,R)) = \max\left\{\left(\|a\|_H^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle e_i, a\rangle_H^2\right)^{\frac{1}{2}} - R, 0\right\}$.

VII 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\geq 0} \in E$ et $(b_n)_{n \geq 0} \in E$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = a_{2n+1}$ et $b_{2n} = b_{2n+1}$ $\Rightarrow \lambda a_{2n} + b_{2n} = \lambda a_{2n+1} + b_{2n+1} \Rightarrow (\lambda a_n + b_n)_{n \geq 0} \in E \Rightarrow E$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$; si $(a_n^N)_{n\geq 0} \in E$ vérifie $(a_n^N)_{n \geq 0} \xrightarrow[N \to +\infty]{} (a_n^\infty)_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, alors : $\forall n \geq 0$, $|a_n^N - a_n^\infty| \leq \|(a_n^N)_{n\geq 0} - (a_n^\infty)_{n \geq 0}\|_{\ell^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$; comme $\forall n \geq 0$, $a_{2n}^N = a_{2n+1}^N$, à la limite $N \to +\infty$, $a_{2n}^\infty = a_{2n+1}^\infty \Rightarrow (a_n^\infty)_{n\geq 0} \in E \Rightarrow E$ est fermé.

2.a. Soit $(b_n)_{n\geq 0} \in E^\perp$; comme la suite c^N définie par $c_n^N = 1$ si $n = 2N$ ou $n = 2N+1$, et 0 sinon, appartient à E, $\langle (b_n)_{n \geq 0}, c^N \rangle_{\ell^2} = 0 \Rightarrow b_{2N} + b_{2N+1} = 0 \Rightarrow E^\perp \subset G = \{(b)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ t.q. $\forall n \geq 0,\ b_{2n} + b_{2n+1} = 0\}$; réciproquement, si $(b_n)_{n\geq 0} \in G$, alors $\forall (a_n)_{n \geq 0} \in E$, $\langle (a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{2n} b_{2n} + a_{2n+1} b_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n}(a_{2n} - a_{2n+1}) = 0 \Rightarrow (b_n)_{n\geq 0} \in E^\perp \Rightarrow E^\perp = G$.

b. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$; posons $\forall n \geq 0$, $b_{2n} = b_{2n+1} = \frac{a_{2n} + a_{2n+1}}{2}$, et $c_{2n} = -c_{2n+1} = \frac{a_{2n} - a_{2n+1}}{2}$; comme $\forall n \geq 0$, $\left(\frac{a_{2n} \pm a_{2n+1}}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left[a_{2n}^2 + a_{2n+1}^2\right]$, les suites $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont bien définies dans $\ell^2(\mathbb{N})$, avec $(b_n)_{n\geq 0} \in E$ et $(c_n)_{n\geq 0} \in E^\perp$; comme $\forall n \geq 0$, $a_{2n} = b_{2n} + c_{2n}$ et $a_{2n+1} = b_{2n+1} + c_{2n+1}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ fournissent la décomposition de $(a_n)_{n\geq 0}$ suivant E et $E^\perp$.

VIII 1.a. Comme $\phi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, $\phi_n \in L^2(\mathbb{R})$, et : $\|\phi_n\|_{L^2}^2 = \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{n}\right)^2 dx \overset{y = \frac{x}{n}}{=} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)^2 dy \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \phi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

b. Comme $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ et $\phi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, $h_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ et : $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\,dx\right)$; sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{n}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\,dy = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx = 0 \Rightarrow h_n \in V$.

c. Soit $f \in V^\perp$; comme $\forall n \geq 1$, $h_n \in V$, $\langle f, h_n\rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow \langle f, g\rangle_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx\right) \langle f, \phi_n\rangle_{L^2}$; comme $|\langle f, \phi_n\rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi_n\|_{L^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après la question 1.a,

$\langle f, g\rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})^\perp \Rightarrow V^\perp \subset \mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})^\perp$.

2. Comme $\mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, $\overline{\mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})^\perp = \overline{\mathcal{E}_c^0(\mathbb{R})}^\perp = \{0\}$; d'après la question 1.c, $V^\perp \subset \{0\} \Rightarrow V^\perp = \{0\} \Rightarrow \overline{V} = (V^\perp)^\perp = L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow V$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

IX 1. (i) Soit $\forall n \geq 0$, $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{0 \leq k \leq n}$; E_n est un sous-espace de dimension finie de H, donc est fermé dans H; de plus, la projection p_n sur E_n est donnée par : $\forall x \in H$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle_H e_k$; comme $\langle x - p_n(x), p_n(x)\rangle_H = 0$, $\|x\|_H^2 = \|p_n(x)\|_H^2 + \|x - p_n(x)\|_H^2 \geq \|p_n(x)\|_H^2$; sachant que $\|p_n(x)\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle_H^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$, $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \|x\|_H^2$
$\Rightarrow$ La série $\sum_{k \geq 0} a_k^2$ est convergente $\Rightarrow a \in \ell^2(\mathbb{N})$.

(ii) Comme $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H, quel que soit $x \in H$, il existe $(v_k)_{k\geq 0} \in \mathrm{Vect}(e_n)_{n \geq 0}$ tel que $v_k \underset{k \to +\infty}{\Rightarrow} x$; si $v_k = \sum_{l=0}^{n_k} \alpha_k^l e_l$, alors, par définition de la projection p_{n_k}, $\|x - p_{n_k}(x)\|_H \leq \|x - v_k\|_H$; comme $\forall n \geq n_k$, $E_{n_k} \subset E_n$, $\|x - p_n(x)\|_H \leq \|x - v_k\|_H \Rightarrow \|x - p_n(x)\|_H \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \Rightarrow p_n(x) \underset{n \to +\infty}{\Rightarrow} x \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \|p_n(x)\|_H^2 \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|^2$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = \|x\|_H^2 \Rightarrow \|a\|_{\ell^2} = \|x\|_H$.

2. (i) $\forall n \geq m \geq 0$, $\|\sum_{k=0}^{n} a_k e_k - \sum_{k=0}^{m} a_k e_k\|_H^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} a_k e_k\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2$; comme $\sum_{k\geq 0} a_k^2$ est convergente, $(\sum_{k=0}^{n} a_k^2)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy $\Rightarrow (\sum_{k=0}^{n} a_k e_k)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $H \Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k e_k$ est convergente dans H.

(ii) Comme $\forall m \geq n \geq 0$, $a_n = \langle \sum_{k=0}^{m} a_k e_k, e_n\rangle_H$, à la limite $m \to +\infty$, $a_n = \langle \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e_k, e_n\rangle_H$.

3. D'après la question 1, Φ est bien définie de H dans $\ell^2(\mathbb{N})$; par bilinéarité du produit scalaire, Φ est linéaire, et d'après la question 2, Φ est surjective; si $x \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle x, e_n\rangle_H = 0 \Rightarrow x \perp \mathrm{Vect}(e_n)_{n\geq 0}$; comme $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\geq 0}$ est dense dans H, $\mathrm{Vect}(e_n)_{n \geq 0}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \Phi$ est injective $\Rightarrow \Phi$ est un isomorphisme de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

4. Soit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e_n}{n+1}$; comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente, d'après la question 2, x est bien défini dans H; supposons que $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base algébrique de H; il existe alors $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $x = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e_k \Rightarrow \langle x, e_{N+1}\rangle_H = 0$; comme $\langle x, e_{N+1}\rangle_H = \frac{1}{N+2} > 0$ d'après la question 2, ceci est absurde ! $\Rightarrow (e_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une base algébrique de H.

X 1. Comme $e_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\Rightarrow} e_\infty$ dans H, et $\forall n \geq 0$, $\|e_{\varphi(n)}\|_H = 1$, $\|e_\infty\|_H = 1$.

2. Comme $\forall n \geq 0$, $\phi(n+1) > \phi(n)$, $\langle e_{\phi(n)}, e_{\phi(n+1)} \rangle_H = 0$.

3. Sachant que $e_{\phi(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e_\infty$, $\langle e_{\phi(n)}, e_{\phi(n+1)} \rangle_H \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|e_\infty\|_H^2$; d'après les questions 1 et 2, $0 = \|e_\infty\|_H^2 = 1$, ce qui est absurde ! $\Rightarrow (e_n)_{n \geq 0}$ ne contient aucune sous-suite convergente dans H ; comme $\forall n \geq 0$, $\|e_n\|_H = 1$, $\forall n \geq 0$, $e_n \in B_f(0,1) \Rightarrow B_f(0,1)$ n'est pas compacte.

XI 1.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in V^2$; ppt $x \in \mathbb{R}$, $\lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) \Rightarrow \lambda f + g \in V \Rightarrow V$ est un sous-espace de $L^2_{pér}$; soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ dans $L^2_{pér}$; il existe $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ p.p ; comme ppt $x \in \mathbb{R}$, $f_{\varphi(n)}(-x) = f_{\varphi(n)}(x)$, ppt $x \in \mathbb{R}$, $f_\infty(-x) = f_\infty(x) \Rightarrow f_\infty \in V \Rightarrow V$ est fermé dans $L^2_{pér}$.

b. $\langle \ , \ \rangle_{L^2}$ reste un produit scalaire sur V, et si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de V, alors, $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $L^2_{pér} \Rightarrow \exists f_\infty \in L^2_{pér}$ t.q. $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_\infty$ dans $L^2_{pér}$; d'après la question 1.a, $f_\infty \in V \Rightarrow V$ est complet $\Rightarrow V$ est un espace de Hilbert.

2.a. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\langle f_m, f_n \rangle_{L^2_{pér}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((2^m + 2^n)x) + \cos((2^m - 2^n)x) \right) dx = 0$ si $m \neq n$, 1 si $m = n \Rightarrow (f_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de V.

b. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{2} \cos(3x)$; $g \in V$ et $\forall n \geq 0$, $\langle f_n, g \rangle_{L^2_{pér}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((3 + 2^n)x) + \cos((3 - 2^n)x) \right] dx = 0 \Rightarrow g \in \mathrm{Vect}(f_n)_{n \geq 0}^{\perp} \Rightarrow \mathrm{Vect}(f_n)_{n \geq 0}^{\perp} \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Vect}(f_n)_{n \geq 0}$ n'est pas dense dans $V \Rightarrow (f_n)_{n \geq 0}$ n'est pas une base hilbertienne de V.

3.a. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\langle e_n, e_m \rangle_{L^2_{pér}} = \frac{1}{4\pi} \left(\sqrt{2}(1 - \delta_{n,0}) + \delta_{n,0} \right) \left(\sqrt{2}(1 - \delta_{m,0}) + \delta_{m,0} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x) \right] dx = 0$ si $m \neq n$, 1 si $m = n \Rightarrow (e_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale de V.

b. Soit $f \in V$ et $(P_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}$ t.q. $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ dans $L^2_{pér}$; posons ppt $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = \frac{1}{2}\left[P_n(x) + P_n(-x) \right]$ et $R_n(x) = \frac{1}{2}\left[P_n(x) - P_n(-x) \right]$; $Q_n \in \mathcal{P} \cap V$ et ppt $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = Q_n(x) + R_n(x)$; par parité, $\|P_n - f\|_{L^2_{pér}}^2 = \|Q_n - f\|_{L^2_{pér}}^2 + \|R_n\|_{L^2_{pér}}^2 \geq \|Q_n - f\|_{L^2_{pér}}^2 \Rightarrow \|Q_n - f\|_{L^2_{pér}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ dans $V \Rightarrow \mathcal{P} \cap V$ est dense dans V.

c. Comme $\mathcal{P} \cap V = \mathrm{Vect}(e_n)_{n \geq 0}$, d'après la question 3.b, $\mathrm{Vect}(e_n)_{n \geq 0}$ est dense dans V ; d'après la question 3.a, $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de V.

XII 1.a. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$; f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et par la formule de

Leibnitz, $\forall x \geq 0$, $f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} \Rightarrow$ $L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} X^{n-k}$ convient ; si $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfait $\forall x \geq 0$, $f_n^{(n)}(x) = n!\, P(x) e^{-x}$, alors : $\forall x \geq 0$, $P(x) = L_n(x) \Rightarrow P = L_n$, d'où l'unicité de L_n.

b. Comme $L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} X^{n-k}$, $d^\circ(L_n) = n$ et $L_n(X) = \frac{(-1)^n}{n!} X^n + \ldots$

c. Comme $\forall n \geq 0$, $d^\circ(L_n) = n$, $(L_n)_{n \geq 0}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$.

2.a. Soit P une fonction polynôme ; la fonction $x \mapsto P(x)^2 e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et il existe un nombre $C \geq 0$ t.q. $\forall x \geq 0$, $P(x)^2 e^{-x} \leq \frac{C}{1+x^2} \Rightarrow$ cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow P \in H$; comme l'ensemble des fonctions polynômes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est un sous-espace de H.

b. $\forall n > m \geq 0$, $\langle L_m, L_n \rangle_H = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} L_m(x) f_n^{(n)}(x)\,dx$; comme $f_n(x) \underset{x \to 0}{=} x^n + o(x^n)$, $\forall 0 \leq k \leq n-1$, $f_n^{(k)}(0) = 0$; par la formule de Leibnitz, $\forall 0 \leq k \leq n-1$, $\exists P_k \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(k)}(x) = P_k(x) e^{-x} \Rightarrow L_m^{(n-k-1)}(x) f_n^{(k)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et $x \mapsto L_m^{(n-k)}(x) f_n^{(k)}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow \langle L_m, L_n \rangle_H = \frac{1}{n!} \left[L_m(x) f_n^{(n-1)}(x) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} L_m'(x) f_n^{(n-1)}(x)\,dx$ $= -\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} L_m'(x) f_n^{(n-1)}(x)\,dx$, puis par récurrence sur $0 \leq k \leq m+1$, $\langle L_m, L_n \rangle_H$ $= \frac{(-1)^{m+1}}{n!} \int_0^{+\infty} L_m^{(m+1)}(x) f_n^{(n-m+1)}(x)\,dx$; comme $d^\circ(L_m) = m$, $\forall x \geq 0$, $L_m^{(m+1)}(x) = 0$ $\Rightarrow \langle L_m, L_n \rangle_H = 0$

c. Par récurrence sur $n \geq 0$; au rang $n = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 = 0!$; supposons que $\forall 0 \leq k \leq n$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx = k!$; $\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x}\,dx = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ $= (n+1)!$, d'où $\forall n \geq 0$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$

d. D'après la question 2.b, $\forall n \geq 0$, $\|L_n\|_H^2 = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(x) f_n(x)\,dx$; d'après la question 1.b, $\forall x \geq 0$, $L_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} n! \Rightarrow \|L_n\|_H^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = 1$ d'après la question 2.c ; d'après la question 2.b, $(L_n)_{n \geq 0}$ est orthonormale.

3. D'après la question 1.c, $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(L_n)_{n \geq 0}$ est dense dans H ; comme $(L_n)_{n \geq 0}$ est orthonormale par la question 2.d, $(L_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H.