GRAVEJAT Philippe 28/12/23

L3

TD N° 1 : Séries de Fourier

I 1. Comme $\forall n \geq 1$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente, $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $\forall n \geq 1$, u_n est continue sur $\mathbb{R}$, par convergence normale, S est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow S(x) \underset{x\to 0}{\to} S(0) = 0$.

3. Par convergence normale, et continuité des fonctions u_n et de la somme S, $\int_0^\pi S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\left[-\cos(nx)\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$.

4. Comme $\forall n \geq 1$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u'_n(x)| = \frac{1}{n^2}$, et que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente, $\sum_{n\geq 1} u'_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; par convergence normale de $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ sur $\mathbb{R}$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

II 1.a. Comme $\forall k \geq 1$, $v_k = V_k - V_{k-1}$, $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k (V_k - V_{k-1})$ $= u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n$.

b. Soit $M \geq 0$ t.q. $\forall n \geq 0$, $|V_n| \leq M$; $\forall n \geq 0$, $|u_n V_n| \leq M|u_n|$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $u_n V_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$; comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $\forall k \geq 0$, $|(u_k - u_{k+1})V_k| \leq M(u_k - u_{k+1})$; sachant que $u_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, $\sum_{k\geq 0}(u_k - u_{k+1})$ est convergente $\Rightarrow \sum_{k\geq 0}(u_k - u_{k+1}) V_k$ est absolument convergente, donc convergente $\overset{1.a.}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0} u_n v_n$ est convergente.

2.a. Soit $\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$; si $x \notin \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{ix} \neq 1$ $\Rightarrow V_n(x) = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \Rightarrow |V_n(x)| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}$; comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante de limite nulle, par la question 1.b, $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ est convergente, d'où la convergence simple sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

b. Lorsque $x = 0$, $\forall n \geq 0$, $U_n(0) = u_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} U_n(0)$ est convergente ssi $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente ; suivant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, la série $\sum_{n\geq 0} U_n(0)$ peut être convergente (par exemple si $\forall n \geq 0$, $u_n = 2^{-n}$) ou divergente (par exemple si $\forall n\geq 0$, $u_n = \frac{1}{n+1}$).

3.a. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right) = -2i\, e^{\frac{ix}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $|1-e^{ix}| = 2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \Rightarrow \forall x \in [2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$, $|1 - e^{ix}| \geq 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0 \Rightarrow \forall n \geq 0$,

$|v_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \Rightarrow |u_n v_n(x)| \leq \frac{u_n}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$; comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $(u_n v_n(x))_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$; de même, $\forall k \geq 0$, $|(u_k - u_{k+1}) V_k(x)| \leq \frac{u_k - u_{k+1}}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$; comme $\sum_{k \geq 0} (u_k - u_{k+1})$ est convergente, $\sum_{k \geq 0} (u_k - u_{k+1}) V_k(x)$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$, d'où la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ sur $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$.

b. Comme les fonctions v_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par convergence uniforme, v est continue sur $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$ pour tout $0 < \delta < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$, donc sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, puis sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

III 1. La fonction g est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow \forall n \geq 1$, $b_n(g) = 0$, $a_0(g) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt + \frac{\pi^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt\right] = \frac{\pi^2}{6}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(nt)\, dt + \frac{\pi^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nt)\, dt\right] = \frac{(-1)^p}{2p^2}$ si $n = 2p$, et $\frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3}$ si $n = 2p+1$.

2. Comme la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p^2} \cos(2px) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3} \cos((2p+1)x) \xRightarrow{x=0,\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3} = -\frac{\pi^2}{6}$, et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{12}$ et $S_2 = \frac{\pi^3}{32}$.

IV 1. La fonction h est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(\pi)(1-in)}{\pi(1+n^2)}$.

2. Comme la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} \frac{(1-in)}{(1+n^2)} e^{inx} = \frac{1}{2}\left[h(x^+) + h(x^-)\right] \xRightarrow{x=\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sh}(\pi)(1-in)}{\pi(1+n^2)} = \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) = \operatorname{ch}(\pi) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\operatorname{ch}(\pi)}{\operatorname{sh}(\pi)} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}$.

V 1. Considérons la fonction 2π-périodique f définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |\sin(x)|$; la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow \forall n \geq 1$, $b_n(f) = 0$, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = \frac{2}{\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\, dt = 0$, si $n = 2p+1$, $\frac{4}{\pi(1-n^2)}$ si $n = 2p$; comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) \Rightarrow \forall x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4p^2)} \cos(2px)$, d'où les coefficients $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_{2p} = \frac{4}{\pi(1-4p^2)}$ et $a_{2p+1} = 0$ pour $p \geq 1$.

2. Pour $x = 0$, $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4p^2)} = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$.

VI 1. La fonction f_α est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall n \geq 1$, $b_n(f_\alpha) = 0$, $a_0(f_\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$.

2. Comme la fonction f_α est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f_\alpha(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(nx).$$

3. Pour $x = \pi$, $S_\alpha = \frac{1}{2\alpha}\left[\pi \,\mathrm{cotan}(\alpha\pi) - \frac{1}{\alpha}\right]$; pour $x = 0$, $T_\alpha = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

VII 1. Comme la fonction f_θ est 2π-périodique, paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\theta(x) = a_0(f_\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_\theta)\cos(nx)$; soit $\forall n \geq 0$, $a_n = a_n(f_\theta)$; alors $(1+\theta^2)a_0 - \theta a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\theta^2 - 2\theta\cos(x)}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2}\,dx = 1$; $\theta a_2 - (1+\theta^2)a_1 + 2\theta a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{\theta(\cos(2x)+1) - (1+\theta^2)\cos(x)}{1+\theta^2 - 2\theta\cos(x)} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\,dx = 0$, et $\forall n \geq 2$, $\theta a_{n+1} - (1+\theta^2)a_n + \theta a_{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)) - (1+\theta^2)\cos(nx)}{1+\theta^2 - 2\theta\cos(x)}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = 0$.

2.a. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\theta^2 - 2\theta\cos(x)} \overset{t=\tan(x/2)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-\theta)^2 + t^2(1+\theta)^2} = \frac{1}{1-\theta^2}$; par la question 1, $a_1 = \frac{1}{\theta}\left(-1 + \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}\right) = \frac{2\theta}{1-\theta^2}$, puis, $a_2 = \frac{1}{\theta}\left(2\theta\,\frac{1+\theta^2}{1-\theta^2} - \frac{2\theta}{1-\theta^2}\right) = \frac{2\theta^2}{1-\theta^2}$.

b. D'après la question 1, $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie la récurrence linéaire d'ordre 2 : $\forall n \geq 1$, $a_{n+2} - \left(\frac{1}{\theta} + \theta\right)a_{n+1} + a_n = 0$; comme θ et $\frac{1}{\theta}$ sont deux racines distinctes du polynôme $X^2 - \left(\frac{1}{\theta} + \theta\right)X + 1$, il existe des nombres réels α et β tels que : $\forall n \geq 1$, $a_n = \alpha\theta^n + \frac{\beta}{\theta^n}$.

c. D'après les questions 2.a et 2.b, $\alpha = \frac{2}{1-\theta^2}$ et $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{2\theta^n}{1-\theta^2}$ $\Rightarrow$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1-\theta^2}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\theta^n\cos(nx).$$

VIII (i) Si $|\alpha| < 1$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}} = -\frac{e^{-i(k+1)x}}{1 - \alpha e^{-ix}} = -\sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^l e^{-i(k+l+1)x}$; comme cette série de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, $I_k = -\sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^l \int_0^{2\pi} e^{-i(k+l+1)x}\,dx = 0$ si $k \geq 0$, $-2\pi\alpha^{-k-1}$ si $k \leq -1$.

(ii) Si $|\alpha| > 1$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{e^{-ikx}}{1 - \frac{e^{ix}}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sum_{l=0}^{+\infty}\alpha^{-l} e^{i(l-k)x}$; comme cette série de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, $I_k = \sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^{-l-1}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x}\,dx = 0$ si $k \leq -1$, $2\pi\alpha^{-k-1}$ si $k \geq 0$.

IX 1. La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2 + e^{ix} + e^{-ix}}{4 - e^{ix} - e^{-ix}} = -1 - \frac{6e^{ix}}{e^{2ix} - 4e^{ix} + 1}$; soit $R(X) = \frac{6X}{X^2 - 4X + 1}$; comme $X^2 - 4X + 1 = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3})$, $R(X) = \sqrt{3}\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{X - 2 + \sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{X - 2 - \sqrt{3}}\right)$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{e^{ix} - 2 + \sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{e^{ix} - 2 - \sqrt{3}}\right)$.

2.a Comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, $\dfrac{2-\sqrt{3}}{e^{ix}-(2-\sqrt{3})} = e^{-ix}(2-\sqrt{3})\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n e^{-inx}$; sachant que $2+\sqrt{3} > 1$, $\dfrac{2+\sqrt{3}}{e^{ix}-(2+\sqrt{3})} = -\dfrac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2+\sqrt{3}}} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(2+\sqrt{3})^{-n}e^{inx}$; comme $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$, $\dfrac{2+\sqrt{3}}{e^{ix}-(2+\sqrt{3})} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n e^{inx}$, d'où la formule : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \sqrt{3}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n(e^{inx}+e^{-inx})\right) = \sqrt{3}-1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos(nx)$.

b. Comme la fonction f est paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = 0$; sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $|(2-\sqrt{3})^n\cos(nx)\cos(mx)| \leq (2-\sqrt{3})^n$, et que la série $\sum_{n\geq 0}(2-\sqrt{3})^n$ est convergente, la série $\sum_{n\geq 0}(2-\sqrt{3})^n\cos(nx)\cos(mx)$ converge normalement sur $[0,\pi]$, d'où : $\forall m \geq 1$, $a_m(f) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(mx)\left(\sqrt{3}-1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos(nx)\right)dx = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\int_0^\pi\cos(mx)\cos(nx)\,dx = 2(2-\sqrt{3})^m$; de même, $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\sqrt{3}-1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos(nx)\right)dx = \sqrt{3}-1$; la série de Fourier de la fonction f est donc $\sqrt{3}-1+2\sum_{m\geq 1}(2-\sqrt{3})^m\cos(mx)$, et cette série est égale à f par la question 2. a.

X 1. Comme la fonction f est 2π-périodique, impaire et continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 0$, $a_n(f) = 0$, et $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,dx\right] = 0$ si $n = 2p$, $\dfrac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}$ si $n = 2p+1$.

2. Comme la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier $\sum_{n\geq 1}\dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin((2n+1)x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et vaut : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin((2n+1)x)$.

3. (i) Comme la fonction f est impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\pi a_0(f) = 0$ $\Rightarrow \int_0^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$; comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la primitive F est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Sachant que la fonction f est impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt \overset{y=-t}{=} -\int_0^x f(-y)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy = F(x) \Rightarrow F$ est paire $\Rightarrow \forall n \geq 1$, $b_n(F) = 0$; $a_0(\ ) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)f(t)\,dt = \dfrac{\pi^2}{8}$; $\forall n \geq 1$, $a_n(F) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos(nx)\,dx = -\dfrac{2}{\pi n}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = -\dfrac{1}{n}b_n(f) = 0$ si $n = 2p$, $\dfrac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3}$ si $n = 2p+1$; comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\pi^2}{8} - \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^3}\cos((2n+1)x)$.

4. Comme $F(0) = 0$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$.

XI. 1.a. Comme $\forall n \geq 1$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| \leq 2^{-n}$, et $\sum_{n\geq 1}2^{-n}$ est convergente, $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$

converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b. Comme les fonctions f_n sont bien définies, 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, par convergence normale, S est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

c. Comme les fonctions f_n sont impaires, par convergence simple, S est impaire $\Rightarrow \forall n \geq 0$, $a_n(S) = 0$; comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) \sin(mx)| \leq 2^{-n}$, et $\sum_{n \geq 1} 2^{-n}$ est convergente, $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \sin(mx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow b_m(S) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi} \sin(2^n x) \sin(mx) dx = \frac{1}{2^m}$ si $m = 2^n$, 0 sinon.

2.a. Comme $\forall n \geq m+1$, $2^n h_m = 2^{n-m-1} \pi \in \pi \mathbb{Z}$, $\sin(2^n h_m) = 0 \Rightarrow S(h_m) = \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \sin(2^n h_m)$.

b. Sachant que $\forall 1 \leq n \leq m$, $0 \leq 2^n h_m \leq \frac{\pi}{2}$, et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$, $S(h_m) \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{\pi} h_m = \frac{2m h_m}{\pi} \Rightarrow \frac{S(h_m)}{h_m} \geq \frac{2m}{\pi}$.

c. Supposons par l'absurde que S est dérivable en 0 ; il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{S(h) - S(0)}{h} \underset{h \to 0}{\to} l$; comme $S(0) = 0$, et $h_m \underset{m \to +\infty}{\to} 0$, $\frac{S(h_m)}{h_m} \underset{m \to +\infty}{\to} l$; sachant que $\frac{S(h_m)}{h_m} \underset{m \to +\infty}{\to} +\infty$ par la question 2.b, ceci est absurde ! $\Rightarrow$ S n'est pas dérivable en 0.

XI 1. Pour $l = 0$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha l} = 1 \underset{n \to +\infty}{\to} 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ilx} dx$; $\forall l \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha l} = \frac{e^{i\alpha l(n+1)} - e^{i\alpha l}}{n(e^{i\alpha l} - 1)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ilx} dx$.

2.(i) Comme f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ est convergente.

(ii) Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $N \geq 0$ tel que $\sum_{|n| \geq N+1} |c_n(f)| \leq \varepsilon$; $\forall n \geq 1$, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| = \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_l(f)}{n} \sum_{l=1}^{n} e^{il\alpha k} \right| \leq \varepsilon + \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^{N} |c_l(f)| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{il\alpha k} \right|$; d'après la question 1, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^{N} |c_l(f)| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{il\alpha k} \right| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} f(\alpha k) \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

XII 1. Comme la fonction g est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(g) = 0$, $a_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$.

2. Comme la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

3. Pour $x = \pi$, $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$; pour $x = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \left[S_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{8}$; par le théorème de Parseval, $\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5} \Rightarrow S_3 = \frac{\pi^4}{90}$.

XIV 1. Comme la fonction f_α est 2π-périodique, paire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(f_\alpha) = 0$, $a_0(f_\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha dx = \frac{\alpha}{\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha \cos(nx)\,dx$ $= \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}$.

2. Comme la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2}\left(f_\alpha(x_+) + f_\alpha(x_-)\right)$.

3. Pour $x = \alpha$, $S_\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$; par le théorème de Parseval, $\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2} = \frac{\alpha}{\pi}$ $\Rightarrow T_\alpha = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2} \Rightarrow U_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - T_\alpha = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$.

XV 1. Comme les fonctions f et f' sont 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ et $\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\,dt$ $= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2$; sachant que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - m(f)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(t)|^2 - 2\langle m(f), f(t)\rangle + |m(f)|^2\right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt - 2\pi|c_0(f)|^2$, et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\,c_n(f)$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\,dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n(f)|^2 \geq 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt - 2\pi|c_0(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - m(f)|^2\,dt$.

2. D'après la question 1, l'égalité a lieu ssi $\forall |n| \geq 2$, $c_n(f) = 0$, soit ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = c_0(f) + c_1(f)e^{it} + c_{-1}(f)e^{-it} = a_0(f) + a_1(f)\cos(t) + b_1(f)\sin(t)$, c'est-à-dire ssi il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = a + b\cos(t) + c\sin(t)$.

XVI Comme la fonction f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$; en particulier, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ est convergente, et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} n^2|c_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; comme $c_0(f) = 0$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} n^2|c_n(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; sachant que f' est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\,c_n(f)$, et par le théorème de Parseval, $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} n^2|c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)|^2 \leq \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx$.

XVII 1. Comme la fonction f est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = 0$, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx = \frac{2}{\pi}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x)|\cos(nx)\,dx = 0$ si $n = 2p+1$, $\frac{4(-1)^p}{\pi(1-4p^2)}$ si $n = 2p$; comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2} \cos(2px)$.

2.a. $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2+4}$.

b. Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p^2+1)(1-4p^2)} \cos(2px)$; comme les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{(p^2+1)(1-4p^2)} \cos(2px)$, $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p\, 2p}{(p^2+1)(1-4p^2)} \sin(2px)$ et $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p\, 4p^2}{(p^2+1)(1-4p^2)} \cos(2px)$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, la fonction y est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ -y''(x) + 4y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (p^2+1)}{(p^2+1)(1-4p^2)} \cos(2px) = |\cos(x)|$ d'après la question 1 ; comme $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x+\pi) = y(x)$, y est une solution π-périodique de l'équation différentielle.

3. Soit $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une solution de l'équation différentielle ; $\forall x \in \mathbb{R},\ -(z-y)''(x) + 4(z-y)(x) = 0 \Rightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) - y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} \Rightarrow z(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \cos(2px)}{(p^2+1)(1-4p^2)} + \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$, et toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions de l'équation différentielle.

XVIII.1. Comme la fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $a_0(f) = \frac{1}{2}$, et $\forall n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0$, et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}$.

2.a. D'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R},\ S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{2}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^x \sum_{p=0}^{n-1} \cos((2p+1)t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^x \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{n-1} e^{i(2p+1)t}\right)dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^x \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{2int}-1}{e^{2it}-1}\right)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt$, où la fonction $t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité en chaque point $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par la valeur $2n(-1)^k$.

b. Comme la fonction S_{2n-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par la question 2.a, $\forall x \in [0,\pi],\ S'_{2n-1}(x) = \frac{\sin(2nx)}{\pi \sin(x)}$ si $0<x<\pi$, $\frac{2n}{\pi}$ si $x=0$ et $-\frac{2n}{\pi}$ si $x=\pi$; comme $\forall 0<x<\pi$, $\sin(x)>0$, les racines de S'_{2n-1} sur le segment $[0,\pi]$ sont les nombres $\frac{k\pi}{2n}$, où $1 \leq k \leq 2n-1$.

c. D'après la question 2.b, $\forall 0 \leq k \leq n-1$, $\forall x \in \left[\frac{2k\pi}{2n}, \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$, $S'_{2n-1}(x) \geq 0$ et $\forall x \in \left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \frac{(2k+2)\pi}{2n}\right]$, $S'_{2n-1}(x) \leq 0 \Rightarrow \max_{0\leq x\leq \pi} S_{2n-1}(x) = \max_{0\leq k\leq n-1} S_{2n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$; $\forall 1 \leq k \leq n-1$, $S_{2n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) - S_{2n-1}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{(2k-1)\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt \overset{x=t+\frac{\pi}{2n}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\frac{(2k-1)\pi}{2n}}^{\frac{2k\pi}{2n}} \sin(2nt)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{\sin(t+\frac{\pi}{2n})}\right)dt$; si $k \leq \frac{n-1}{2}$, alors $\forall t \in \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \frac{2k\pi}{2n}\right]$, $0 < t \leq t + \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin(t)} > \frac{1}{\sin(t+\frac{\pi}{2n})}$; comme $\sin(2nt) \leq 0$, $S_{2n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \leq S_{2n-1}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$; sachant que $\forall x \in [0,\pi]$, $\forall 0 \leq p \leq n-1$, $\sin((2p+1)(\pi-x)) = \sin(\pi-(2p+1)x) = \sin((2p+1)x)$, $S_{2n-1}(\pi-x) = S_{2n-1}(x) \Rightarrow \max_{0\leq k\leq n-1} S_{2n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \max_{0\leq k\leq \frac{n-1}{2}} S_{2n-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = S_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt$.

3.a. $\forall n \geq 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt \overset{u=2nt}{=} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{2n\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du$; comme $\forall 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$,

$\forall\, 0 \leq u \leq \pi$, $\left| \dfrac{\sin(u)}{2n\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \right| \leq \dfrac{\pi\,|\sin(u)|}{2|u|}$; sachant que $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| du$ est convergente,

et $\forall\, 0 < u \leq \pi$, $\dfrac{\sin(u)}{2n\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin(u)}{u}$, par le théorème de convergence dominée,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$

b. D'après les questions 2.c et 3.a, $\displaystyle\max_{x\in[0,\pi]} S_{2n-1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\, dt > 1 \left(= \max_{x\in[0,\pi]} \varphi(x) \right).$