

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Les coefficients de Fourier complexes de la dérivée f' d'une fonction f 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ sont donnés par la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f).$$

2. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ d'un espace vectoriel réel E est relié à la norme euclidienne $\| \cdot \|_E$ associée par la formule de polarisation

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle_E = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|_E^2 - \|x - y\|_E^2 \right).$$

3. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'un espace vectoriel réel E est de Cauchy pour une norme $\| \cdot \|$ si et seulement si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \geq 0$ tel que

$$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon.$$

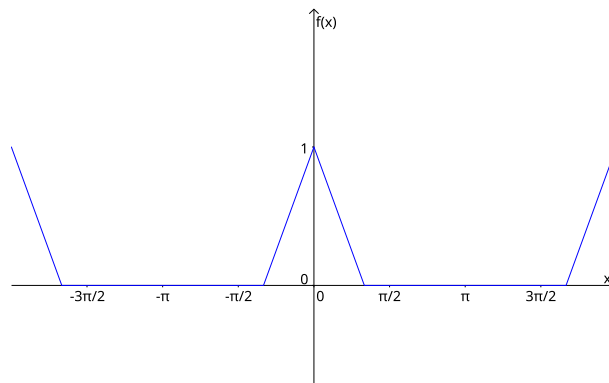
4. Le bi-orthogonal $(F^\perp)^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert réel H est donné par la formule

$$(F^\perp)^\perp = \bar{F},$$

où $\bar{F}$ désigne l'adhérence du sous-espace F .

Exercice 1.

1.a. La définition de la fonction f sur l'intervalle fondamental $] -\pi, \pi]$ et sa 2π -périodicité assurent que son graphe présente l'allure suivante, par exemple pour $\alpha = \pi/3$:



b. Lorsque $|x| \leq \alpha$, nous déduisons de la définition de la fonction f que

$$f(-x) = 1 - \frac{|-x|}{\alpha} = 1 - \frac{|x|}{\alpha} = f(x),$$

tandis que pour $\alpha \leq |x| \leq \pi$,

$$f(-x) = 0 = f(x).$$

Par conséquent la fonction f est paire sur $[-\pi, \pi]$, puis par 2π -périodicité, sur $\mathbb{R}$. Sachant que

$$f(0) = 1 \neq 0,$$

elle n'est par contre pas impaire sur $\mathbb{R}$.

c. Par définition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\pi, -\alpha[,] -\alpha, 0[,]0, \alpha[$ et $] \alpha, \pi[$. Elle satisfait de plus

$$\lim_{x \rightarrow (-\alpha)^\pm} f(x) = f(-\alpha) = 0 = f(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^\pm} f(x), \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = f(0) = 1,$$

de sorte qu'elle est continue sur $] -\pi, \pi[$. Sachant que

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} f(x) = f(-\pi) = 0 = f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x),$$

elle s'avère par 2π -périodicité continue sur $\mathbb{R}$.

Quant à sa dérivée, elle vaut

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < |x| < \pi, \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } -\alpha < x < 0, \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{si } 0 < x < \alpha. \end{cases}$$

Elle admet donc des limites finies en $(-\pi)^+$, $(-\alpha)^\pm$, $0^\pm$, $\alpha^\pm$ et π^- , de sorte qu'elle est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, puis par 2π -périodicité sur $\mathbb{R}$. En conclusion la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Comme la fonction f est 2π -périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$, ses coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n \geq 1}$ sont bien définis et valent

$$\forall n \geq 1, b_n(f) = 0.$$

b. De même, le coefficient de Fourier $a_0(f)$ est bien défini, et par parité il vaut

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[x - \frac{x^2}{2\alpha}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

c. De façon similaire, les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n \geq 1}$ sont bien définis et donnés par les formules

$$\forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cos(nx) dx.$$

Nous pouvons intégrer par parties cette expression afin d'obtenir

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \left[\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\alpha + \frac{2}{n\alpha\pi} \int_0^\alpha \sin(nx) dx.$$

Comme $\sin(0) = 0$, nous concluons que

$$a_n(f) = \frac{2}{n\alpha\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\alpha = \frac{2}{n^2\alpha\pi} (1 - \cos(n\alpha)).$$

3.a. Comme la fonction f est 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet assure que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \frac{\alpha}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\alpha\pi} (1 - \cos(n\alpha)) \cos(nx).$$

Pour $x = 0$, nous obtenons

$$1 = f(0) = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{2}{\alpha\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)}{n^2},$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4}.$$

b. Comme la fonction f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval assure que la série $\sum_{n \geq 1} |a_n(f)|^2$ est convergente et vaut

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{2}{\alpha^2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha))^2}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Nous calculons alors par parité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2 dx = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^3\right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{3\pi},$$

d'où la formule

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha))^2}{n^4} = \frac{\alpha^2\pi^2}{2} \left(\frac{\alpha}{3\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) = \frac{\alpha^2}{24} (4\pi\alpha - 3\alpha^2).$$

c. Comme à la question 3.a, nous appliquons le théorème de Dirichlet pour $x = \alpha$. Nous obtenons

$$0 = f(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{2}{\alpha\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha)) \cos(n\alpha)}{n^2},$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha)) \cos(n\alpha)}{n^2} = -\frac{\alpha^2}{4}.$$

Nous pouvons alors sommer cette formule et celle de la question 3.a pour conclure que

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\alpha)}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n\alpha)) \cos(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(2\pi - \alpha)}{4} - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Exercice 2.

1.a. Soit $a = (a_n)_{n \geq 0}$ une suite de H . Comme

$$\forall n \geq 0, a_n^2 \leq 2^n a_n^2,$$

par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} a_n^2$ est convergente, de sorte que la suite a appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. L'ensemble H est donc bien inclus dans cet espace. De plus, si λ est un nombre réel, et $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites de H , alors

$$\forall n \geq 0, 2^n (\lambda a_n + b_n)^2 = 2^n \lambda^2 a_n^2 + 2^{n+1} \lambda a_n b_n + 2^n b_n^2 \leq 2(\lambda^2 2^n a_n^2 + 2^n b_n^2),$$

puisque $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ quels que soient les nombres réels α et β . À nouveau par comparaison, nous déduisons de cette inégalité que la série $\sum_{n \geq 0} 2^n (\lambda a_n + b_n)^2$ est convergente, ce qui assure que la suite $(\lambda a_n + b_n)_{n \geq 0}$ appartient à H . Nous concluons ainsi que H est un sous-espace vectoriel de l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Considérons deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de H , et rappelons que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2.$$

Il découle de cette inégalité que

$$\forall n \geq 0, |2^n a_n b_n| \leq \frac{1}{2} (2^n a_n^2 + 2^n b_n^2),$$

d'où par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 0} 2^n a_n b_n$. Cette série est donc convergente, ce qui assure que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est bien définie de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.

Nous vérifions alors que cette application est bilinéaire symétrique définie positive. Sa symétrie résulte du fait que

$$\forall (a, b) \in H \times H, \langle b, a \rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n b_n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n b_n = \langle a, b \rangle_H,$$

tandis que, par symétrie, sa bilinéarité provient du développement suivant

$$\langle \lambda a + c, b \rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (\lambda a_n + c_n) b_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n b_n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n c_n b_n = \lambda \langle a, b \rangle_H + \langle c, b \rangle_H,$$

qui est valable pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes suites a, b et c de H . Enfin, nous vérifions que

$$\langle a, a \rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n^2 \geq 0,$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si

$$\forall n \geq 0, 2^n a_n = 0,$$

soit si et seulement si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est identiquement nulle. En conclusion, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est bien un produit scalaire réel sur l'espace H .

2.a. Par définition de la suite de Cauchy $(a^{(p)})_{p \geq 0}$, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier $P \geq 0$ tel que

$$\forall p, q \geq P, \|a^{(p)} - a^{(q)}\|_H \leq \varepsilon,$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (a_n^{(p)} - a_n^{(q)})^2 \leq \varepsilon^2.$$

Nous pouvons écrire cette inégalité en fonction des suites $(u_n^{(p)})_{n \geq 0}$ sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n^{(p)} - u_n^{(q)})^2 \leq \varepsilon^2,$$

soit

$$\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{\ell^2} \leq \varepsilon.$$

En définitive, nous arrivons bien à la conclusion que la suite $(u^{(p)})_{p \geq 0}$ est de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Nous savons que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, donc est complet pour sa norme canonique. Comme $(u^{(p)})_{p \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, elle est convergente : il existe une suite $u^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que

$$\|u^{(p)} - u^\infty\|_{\ell^2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Introduisons alors la suite a^∞ définie par

$$\forall n \geq 0, a_n^\infty = \frac{u_n^\infty}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Sachant que

$$\forall n \geq 0, 2^n (a_n^\infty)^2 = (u_n^\infty)^2,$$

et que $u^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, la série $\sum_{n \geq 0} 2^n (a_n^\infty)^2$ est convergente, et la suite a^∞ appartient au sous-espace H . De plus, elle satisfait

$$\|a^{(p)} - a^\infty\|_H^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (a_n^{(p)} - a_n^\infty)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n^{(p)} - u_n^\infty)^2 = \|u^{(p)} - u^\infty\|_{\ell^2}^2,$$

ce qui assure que

$$\|a^{(p)} - a^\infty\|_H \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous concluons que toute suite de Cauchy de H pour la norme $\|\cdot\|_H$ est convergente dans H . L'espace H est donc complet pour la norme $\|\cdot\|_H$, et il s'agit bien d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire réel $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

3.a. Observons d'abord que la suite nulle définie par

$$\forall n \geq 0, o_n = 0,$$

appartient au sous-espace H puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n o_n^2 = 0,$$

et qu'elle satisfait

$$\forall n \geq 0, |o_n| = 0 \leq 1.$$

Il s'agit donc d'une suite du sous-ensemble $\mathcal{B}$, qui est donc non vide.

De plus, étant donnés un nombre $0 \leq t \leq 1$ et deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{B}$, la suite $(ta_n + (1-t)b_n)_{n \geq 0}$ appartient à H , puisqu'il s'agit d'un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et elle satisfait

$$\forall n \geq 0, |ta_n + (1-t)b_n| \leq |t||a_n| + |1-t||b_n| \leq t + 1 - t = 1,$$

par l'inégalité triangulaire. Nous concluons que la suite $(ta_n + (1-t)b_n)_{n \geq 0}$ appartient au sous-ensemble $\mathcal{B}$, qui est donc aussi convexe.

b. Soit $a = (a_n)_{n \geq 0} \in H$. Nous avons

$$\forall n \geq 0, a_n^2 \leq 2^n a_n^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_k^2 = \|a\|_H^2,$$

d'où l'inégalité

$$\|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \geq 0} |a_n| \leq \|a\|_H.$$

c. Considérons des suites $a^{(p)} = (a_n^{(p)})_{n \geq 0}$ de $\mathcal{B}$ qui convergent dans H , soit telles qu'il existe une suite $a^\infty = (a_n^\infty)_{n \geq 0}$ de H telle que

$$\|a^{(p)} - a^\infty\|_H \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Quel que soit l'entier $p \geq 0$, nous déduisons de l'inégalité triangulaire et du fait que la suite $a^{(p)}$ soit dans $\mathcal{B}$ que

$$\forall n \geq 0, |a_n^\infty| \leq |a_n^{(p)}| + |a_n^\infty - a_n^{(p)}| \leq 1 + |a_n^\infty - a_n^{(p)}|.$$

Il résulte donc de la question 3.b que

$$|a_n^\infty| \leq 1 + \|a^\infty - a^{(p)}\|_H,$$

de sorte qu'à la limite $p \rightarrow +\infty$,

$$|a_n^\infty| \leq 1.$$

En conclusion la suite a^∞ appartient au sous-ensemble $\mathcal{B}$ qui est donc fermé.

d. Nous vérifions d'abord que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et qu'elle satisfait

$$\forall n \geq 0, |b_n| = \begin{cases} |a_n|, & \text{si } |a_n| \leq 1, \\ 1, & \text{si } |a_n| > 1, \end{cases}$$

soit

$$|b_n| \leq |a_n|.$$

Sachant que la série $\sum_{n \geq 0} 2^n a_n^2$ est convergente, par le principe de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} 2^n b_n^2$ est aussi convergente, ce qui assure que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ appartient au sous-espace H .

De même les inégalités

$$|b_n| = \begin{cases} |a_n|, & \text{si } |a_n| \leq 1, \\ 1, & \text{si } |a_n| > 1, \end{cases}$$

induisent que

$$|b_n| \leq 1,$$

et nous concluons donc que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ appartient au sous-ensemble $\mathcal{B}$.

e. Pour $a \in H$, considérons la suite $b = (b_n)_{n \geq 0}$ de la question 3.d définie par

$$\forall n \geq 0, b_n = \begin{cases} a_n, & \text{si } |a_n| \leq 1, \\ \frac{a_n}{|a_n|}, & \text{si } |a_n| > 1. \end{cases}$$

Nous avons vérifié que cette suite appartient à $\mathcal{B}$. De plus, étant donnée une suite $c = (c_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{B}$, nous calculons

$$\langle a - b, c - b \rangle_H = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (a_n - b_n)(c_n - b_n).$$

Dans cette série, lorsque $|a_n| \leq 1$, le nombre b_n est égal à a_n , et nous avons donc

$$2^n(a_n - b_n)(c_n - b_n) = 0.$$

Si $|a_n| > 1$, alors le nombre b_n est égal à $a_n/|a_n|$, et nous calculons

$$2^n(a_n - b_n)(c_n - b_n) = 2^n a_n \left(1 - \frac{1}{|a_n|}\right) \left(c_n - \frac{a_n}{|a_n|}\right).$$

Deux cas se présentent alors. Soit $a_n \geq 1$, auquel cas

$$a_n > 0, \quad 1 - \frac{1}{|a_n|} > 0, \quad \text{et} \quad c_n - \frac{a_n}{|a_n|} = c_n - 1 \leq 0.$$

Soit $a_n \leq -1$, auquel cas

$$a_n < 0, \quad 1 - \frac{1}{|a_n|} > 0, \quad \text{et} \quad c_n - \frac{a_n}{|a_n|} = c_n + 1 \geq 0.$$

Dans les deux cas, nous avons donc

$$2^n(a_n - b_n)(c_n - b_n) \leq 0,$$

ce qui assure que

$$\langle a - b, c - b \rangle_H \leq 0.$$

Par caractérisation de la projection de la suite a sur le sous-ensemble convexe fermé non vide $\mathcal{B}$, nous concluons que cette projection est égale à la suite $(b_n)_{n \geq 0}$.