CY Cergy Paris Université — **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques — **2024-2025**

Corrigé du devoir surveillé

Questions de cours.

1. Les coefficients de Fourier complexes de la fonction f sont définis par les formules

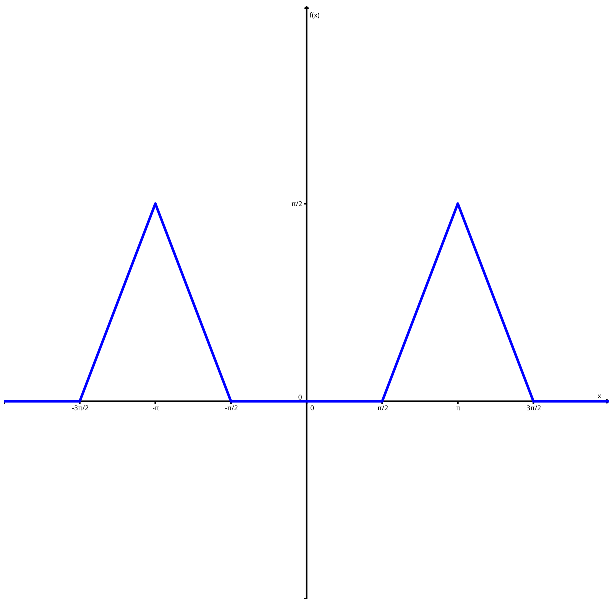
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

2. Une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un polynôme trigonométrique 2π-périodique si et seulement s'il existe un entier $N \geq 1$ et des nombres complexes $(a_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(b_n)_{1 \leq n \leq N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \big).$$

Exercice 1.

1.a. La définition de la fonction f sur l'intervalle fondamental $]-\pi, \pi]$ et sa 2π-périodicité assurent que son graphe présente l'allure suivante :



b. Pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$, nous savons que $-x \in [\pi/2, \pi]$, de sorte que

$$f(-x) = -x - \frac{\pi}{2} = f(x).$$

De même, pour $x \in [\pi/2, \pi]$, nous avons

$$f(-x) = x - \frac{\pi}{2} = f(x).$$

Sachant que

$$\forall x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big],\ f(x) = f(-x) = 0,$$

nous concluons que

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(-x) = f(x).$$

Par 2π-périodicité, cette égalité s'étend à $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

c. Par définition, la fonction f est continue sur $]-\pi, -\pi/2[$, $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]\pi/2, \pi[$, avec

$$f(x) \underset{x \to (-\frac{\pi}{2})^{\pm}}{\longrightarrow} 0 = f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big), \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to (\frac{\pi}{2})^{\pm}}{\longrightarrow} 0 = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big).$$

Elle est donc continue sur $]-\pi, \pi[$. Sachant que cette fonction est 2π-périodique, et qu'elle satisfait

$$f(x) \underset{x \to (-\pi)^{+}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} = f(-\pi), \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to \pi^{-}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} = f(\pi),$$

elle est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

d. Par définition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^1$, sur $]-\pi, -\pi/2[$, $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]\pi/2, \pi[$, avec

$$\forall x \in \Big]-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big[,\ f'(x) = -1,$$

$$\forall x \in \Big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big[,\ f'(x) = 0,$$

et

$$\forall x \in \Big]\frac{\pi}{2}, \pi\Big[,\ f'(x) = 1.$$

Ces trois fonctions ont des limites en $(-\pi)^+$, $(-\pi/2)^\pm$, $(\pi/2)^\pm$ et π^-, de sorte que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, et par 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

2.a. Sachant que la fonction f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, ses coefficients de Fourier sont bien définis. Comme cette fonction est paire, nous savons que

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f) = 0.$$

b. Comme la fonction f est paire, nous calculons

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\, dx = \frac{1}{\pi} \bigg[\frac{\big(x - \frac{\pi}{2}\big)^2}{2}\bigg]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{8}.$$

c. Pour $n \geq 1$, nous déduisons de la parité de la fonction f que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\, \cos(nx)\, dx.$$

Nous pouvons alors intégrer par parties cette expression afin d'obtenir

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \Big[\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\, \frac{\sin(nx)}{n}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(nx)\, dx.$$

Sachant que $\sin(n\pi) = 0$, nous arrivons à

$$a_n(f) = -\frac{2}{\pi n} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi n} \Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{2}{\pi n^2} \Big(\cos(n\pi) - \cos\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\Big).$$

Pour $n = 2k$ pair, nous obtenons

$$a_{2k}(f) = \frac{1}{2\pi k^2}\Big(\cos(2k\pi) - \cos(k\pi)\Big) = \frac{1}{2\pi k^2}\Big(1 - (-1)^k\Big),$$

puisque $\cos(k\pi) = (-1)^k$. De même, pour $n = 2k+1$ impair, nous avons

$$a_{2k+1}(f) = \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\Big(\cos\big((2k+1)\pi\big) - \cos\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)\Big).$$

Comme $\cos((2k+1)\pi) = (-1)^{2k+1} = -1$ et $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$, nous concluons que

$$a_{2k+1}(f) = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}.$$

d. Rappelons que la fonction f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Nous déduisons donc du théorème de Dirichlet que la série de Fourier de la fonction f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et qu'elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(f)\, \cos(nx) + b_n(f)\, \sin(nx)\big) = f(x).$$

Pour $x = 0$, nous déduisons des questions 2.a et 2. b que

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}(f) + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}(f) = 0.$$

Nous vérifions alors que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}(f) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k^2}\Big(1 - (-1)^k\Big)\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi(2p)^2}\Big(1 - (-1)^{2p}\Big) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi(2p+1)^2}\Big(1 - (-1)^{2p+1}\Big) = \frac{1}{\pi} S_1,\end{aligned}$$

tandis que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}(f) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} = -\frac{2}{\pi} S_1.$$

Il s'ensuit que

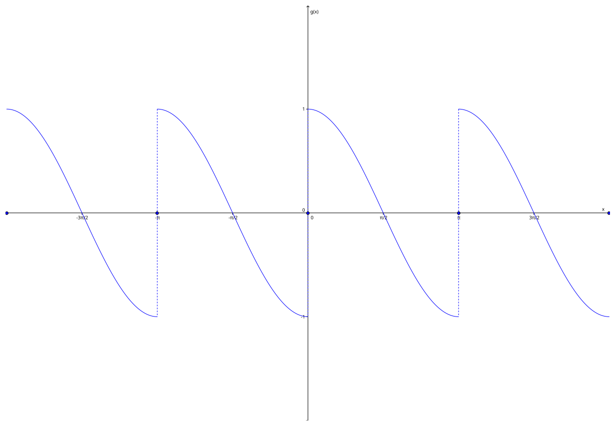
$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} S_1 = 0,$$

ce qui assure que

$$S_1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2.

1.a. La définition de la fonction g sur l'intervalle fondamental $]-\pi, \pi]$ et sa 2π-périodicité assurent que son graphe présente l'allure suivante :



b. Nous vérifions d'abord que

$$g(-0) = -g(0) = 0, \quad \text{et} \quad g(-\pi) = -g(\pi) = 0.$$

Lorsque $x \in]-\pi, 0[$, $-x$ appartient à l'intervalle $]0, \pi[$, d'où les égalités

$$g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = -g(x),$$

par parité de la fonction cosinus. De même, pour $x \in]0, \pi[$,

$$g(-x) = -\cos(-x) = -\cos(x) = -g(x).$$

La fonction g est donc impaire sur $[-\pi, \pi]$, et par 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

c. De par sa définition sur l'intervalle $]0, \pi[$, la fonction g satisfait

$$g(x) = \cos(x) \underset{x \to 0^+}{\to} \cos(0) = 1 \neq 0 = g(0).$$

Elle n'est donc pas continue en 0, et a fortiori, sur $\mathbb{R}$.

d. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^1$, sur chacun des intervalles $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$, avec

$$\forall x \in]-\pi, 0[, \; g(x) = -\cos(x), \quad \text{et} \quad g'(x) = \sin(x),$$

tandis que

$$\forall x \in]0, \pi[, \; g(x) = \cos(x), \quad \text{et} \quad g'(x) = -\sin(x).$$

Sachant que les fonctions cos et sin sont continues, donc ont des limites en $(-\pi)^+$, $0^\pm$ et π^-, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, puis par 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

2.a. Rappelons que la fonction g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, de sorte que ses coefficients de Fourier sont bien définis. Elle est de plus impaire, ce qui assure que

$$\forall n \geq 0, a_n(g) = 0.$$

b. Comme g est impaire sur $\mathbb{R}$, nous savons que

$$\forall n \geq 1, \; b_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \, \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \, \sin(nx) \, dx.$$

Observons alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \cos(x) \, \sin(nx) = \frac{1}{2} \Big(\sin\big((n+1)x\big) + \sin\big((n-1)x\big) \Big).$$

Pour $n = 1$, nous obtenons donc

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x)\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{\cos(2x)}{2} \Big]_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \Big(\cos(0) - \cos(2\pi) \Big) = 0,$$

tandis que pour $n \geq 2$,

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Big(\sin\big((n+1)x\big) + \sin\big((n-1)x\big) \Big)\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \Big]_0^\pi.$$

Sachant que

$$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} = \cos((n-1)\pi),$$

nous arrivons à

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{1 - (-1)^{n-1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \Big) = \frac{2n(1 - (-1)^{n-1})}{\pi(n^2 - 1)}.$$

Pour $n = 2k + 1$ impair, cette expression devient

$$b_{2k+1}(g) = \frac{2(2k+1)(1-1)}{\pi((2k+1)^2 - 1)} = 0,$$

et cette formule est aussi valable pour $k = 0$. Quand $n = 2k$ est pair, nous avons par contre

$$b_{2k}(g) = \frac{4(2k)}{\pi(4k^2 - 1)} = \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)}.$$

c. Nous calculons

$$\forall p \geq 0,\ \sin\Big(\frac{(2p+1)\pi}{2}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + p\pi\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \cos\big(p\pi\big) + \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \sin\big(p\pi\big).$$

Comme $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(p\pi) = 0$ et $\cos(p\pi) = (-1)^p$, nous obtenons

$$\sin\Big(\frac{(2p+1)\pi}{2}\Big) = (-1)^p.$$

d. Rappelons que la fonction g est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est donc convergente sur $\mathbb{R}$, et elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(g) \cos(nx) + b_n(g) \sin(nx) \big) = \frac{1}{2} \Big(\lim_{y \to x^-} g(y) + \lim_{y \to x^+} g(y) \Big).$$

D'après les questions 2.a et 2.b, cette formule s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin(2kx) = \frac{1}{2} \Big(\lim_{y \to x^-} g(y) + \lim_{y \to x^+} g(y) \Big).$$

Pour $x = \pi/4$, nous vérifions que

$$\lim_{y \to \frac{\pi}{4}^-} g(y) = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}^+} g(y) = \cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où la formule

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous pouvons alors séparer les termes d'indice pair et impair dans la série précédente afin d'obtenir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{16p}{\pi(16p^2-1)} \sin\left(p\pi\right) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8(2p+1)}{\pi(4(2p+1)^2-1)} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right).$$

Nous déduisons ainsi du fait que $\sin(p\pi) = 0$ et de la formule de la question 2.c que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8(-1)^p(2p+1)}{\pi(16p^2+16p+3)} = \frac{8}{\pi} S_2,$$

et nous concluons que

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}.$$