Corrigé du devoir à la maison N°2

Exercice 1.

1.a. Soit $p \geq 0$. La suite réelle e^p est bien définie, et elle satisfait

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(e_n^p\big)^2 = 1.$$

Cette suite appartient donc à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, et sa norme $\|e^p\|_{\ell^2}$ est égale à

$$\|e^p\|_{\ell^2} = \sqrt{1} = 1.$$

b. Nous calculons

$$\forall p \neq q \geq 0,\ \langle e^p, e^q \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n^p\, e_n^q = 1 \times e_p^q = 0,$$

et les suites $(e^p)_{p\geq 0}$ forment donc une famille orthogonale de $\ell^2(\mathbb{N})$. D'après la question 1.a, chacune des suites de cette famille est normée, et il s'agit donc d'une famille orthonormée de cet espace.

c. Considérons l'orthogonal V du sous-espace $\mathrm{Vect}(e_p)_{p\geq 0}$ engendré par la famille $(e_p)_{p\geq 0}$. Étant donnée une suite v de V, nous savons que

$$\forall p \geq 0,\ \langle e^p, v \rangle_{\ell^2} = 0.$$

Sachant que

$$\langle e^p, v \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n^p\, v_n = v_p,$$

nous obtenons que

$$\forall p \geq 0,\ v_p = 0,$$

soit que la suite v est identiquement nulle. Le sous-espace V se réduit dont au singleton $\{0\}$, ce qui suffit à montrer que la famille $(e_p)_{p\geq 0}$ est totale. Comme elle est orthonormée par la question 1.b, il s'agit bien d'une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

2.a. Étant donnée une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$, la suite réelle $\delta(u)$ est bien définie, et elle satisfait

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\delta(u)_n\big)^2 = 0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m^2,$$

par le changement d'indices $m = n - 1$. En particulier, la série $\sum_{n\geq 0}(\delta(u)_n)^2$ est convergente, et la suite $\delta(u)$ appartient donc à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$. Par conséquent, l'opérateur de décalage δ est bien défini de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

De plus, si λ désigne un nombre réel, et v une suite de $\ell^2(\mathbb{N})$, alors la suite $\delta(\lambda u + v)$ est définie par

$$\forall n \geq 0,\ \delta(\lambda u + v)_n = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 0, \\ \lambda u_{n-1} + v_{n-1}, \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Comme

$$\forall n \geq 0,\ \lambda\delta(u)_n + \delta(v)_n = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 0, \\ \lambda u_{n-1} + v_{n-1}, \text{ si } n \geq 1, \end{cases}$$

les suites $\delta(\lambda u + v)$ et $\lambda\delta(u) + \delta(v)$ sont égales, ce qui assure que l'opérateur δ est linéaire.
Étant données deux suites u et v de $\ell^2(\mathbb{N})$, nous vérifions enfin que

$$\big\|\delta(v) - \delta(u)\big\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\delta(v)_n - \delta(u)_n\big)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(v_{n-1} - u_{n-1}\big)^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \big(v_m - u_m\big)^2,$$

par le changement d'indices $m = n - 1$. Nous déduisons de cette identité que

$$\big\|\delta(v) - \delta(u)\big\|_{\ell^2} = \big\|v - u\big\|_{\ell^2},$$

ce qui assure que

$$\delta(v) \to \delta(u) \quad \text{dans } \ell^2(\mathbb{N}),$$

lorsque v tend vers u dans $\ell^2(\mathbb{N})$. En conclusion, l'opérateur δ est bien continu sur $\ell^2(\mathbb{N})$.
b. Supposons qu'une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ appartienne au noyau de l'opérateur δ. Dans ce cas,

$$\forall n \geq 0,\ \delta(u)_n = 0.$$

Par définition de l'opérateur δ, ces identités conduisent au fait que

$$\forall n \geq 1,\ u_{n-1} = 0,$$

soit par le changement d'indices $m = n - 1$, au fait que

$$\forall m \geq 0,\ u_m = 0.$$

La suite u est donc identiquement nulle, et le noyau de l'opérateur δ est réduit au singleton $\{0\}$. Cet opérateur est par conséquent injectif.
c. Nous déduisons de la définition du vecteur e^0 que

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \langle u, e^0\rangle_{\ell^2} = u_0.$$

En particulier, le vecteur u est orthogonal au vecteur e^0 si et seulement si $u_0 = 0$; autrement dit,

$$\mathrm{Vect}\big(e^0\big)^\perp = \Big\{u \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ telle que } u_0 = 0\Big\}.$$

Étant donnée une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, nous savons alors que

$$\delta(u)_0 = 0,$$

de sorte que l'image de l'application δ est incluse dans le sous-espace $\mathrm{Vect}(e^0)^\perp$. Réciproquement, si une suite v appartient à ce sous-espace, alors la suite u définie par

$$\forall n \geq 0,\ u_n = v_{n+1},$$

appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, puisqu'elle satisfait

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} v_m^2 < +\infty,$$

par le changement d'indices $m = n + 1$. Par construction, cette suite vérifie aussi

$$\delta(u)_0 = 0 = v_0, \quad \text{ et } \quad \forall n \geq 1, \, \delta(u)_n = u_{n-1} = v_n,$$

ce qui montre que $\delta(u) = v$. Il s'ensuit que l'image de l'opérateur δ est égale au sous-espace $\mathrm{Vect}(e^0)^\perp$. Sachant que

$$\langle e^0, e^0 \rangle_{\ell^2} = \|e^0\|_{\ell^2}^2 = 1,$$

le vecteur e^0 n'appartient à ce sous-espace, et l'opérateur δ n'est donc pas surjectif.

3.a. Étant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$, considérons la suite $\tau(u)$ définie par

$$\forall n \geq 0, \, \tau(u)_n = u_{n+1}.$$

Le changement d'indices $m = n + 1$ assure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tau(u)_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m^2 < +\infty,$$

lorsque la suite u appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Aussi l'opérateur τ est-il bien défini de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$. De plus, cet opérateur est linéaire, puisque

$$\forall n \geq 0, \, \tau(\lambda u + v)_n = (\lambda u + v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \big(\lambda\tau(u) + \tau(v)\big)_n,$$

lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $v \in \ell^2(\mathbb{N})$. Il est également continu, car il vérifie

$$\big\|\tau(v) - \tau(u)\big\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(v_{n+1} - u_{n+1}\big)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(v_m - u_m\big)^2 \leq \big\|v - u\big\|_{\ell^2}^2.$$

Enfin, il satisfait par définition

$$\tau(e^0) = 0,$$

et quel que soit $p \geq 1$,

$$\forall n \geq 0, \, \tau(e^p)_n = e_{n+1}^p = \begin{cases} 1, & \text{si } n + 1 = p, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad = e_n^{p-1},$$

soit $\tau(e^p) = e^{p-1}$. Nous savons donc qu'il existe au moins un opérateur linéaire continu τ de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ qui satisfait ces identités.

Considérons alors un opérateur linéaire continu σ de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ qui satisfait aussi ces identités, et notons V le noyau de l'opérateur $\sigma - \tau$. Nous savons que

$$\sigma(e_0) = 0 = \tau(e_0), \quad \text{ et } \quad \forall p \geq 1, \, \sigma(e^p) = e^{p-1} = \tau(e^p),$$

de sorte que toutes les suites de la famille $(e^p)_{p\geq 0}$ appartiennent au noyau V. Par conséquent,

$$\mathrm{Vect}\big(e^p\big)_{p\geq 0} \subset V,$$

puis

$$\overline{\mathrm{Vect}\big(e^p\big)_{p\geq 0}} \subset \overline{V}.$$

D'après la question 1.c, la famille $(e^p)_{p\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$, donc une famille totale. Il s'ensuit que

$$\overline{\mathrm{Vect}\big(e^p\big)_{p\geq 0}} = \ell^2(\mathbb{N}),$$

ce qui impose que
$$\overline{V} = \ell^2(\mathbb{N}).$$
Rappelons ici que les opérateurs σ et τ sont continus. Par les opérations élémentaires sur les fonctions continues, l'opérateur $\sigma - \tau$ est aussi continu. Comme le noyau V est l'image réciproque du singleton $\{0\}$ par l'opérateur $\sigma - \tau$, ce noyau est un sous-ensemble fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$, ce qui signifie que
$$V = \overline{V} = \ell^2(\mathbb{N}),$$
autrement dit
$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \sigma(u) = \tau(u).$$
En conclusion, l'opérateur τ est l'unique opérateur linéaire continu de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ tel que
$$\tau(e^0) = 0, \quad \text{et} \quad \forall p \geq 1,\ \tau(e^p) = e^{p-1}.$$

b. La définition de l'opérateur τ donnée à la question 3.a conduit aux formules
$$\forall n \geq 0,\ \tau\big(\delta(u)\big)_n = \delta(u)_{n+1},$$
de sorte que par définition de l'opérateur δ,
$$\tau\big(\delta(u)\big)_n = u_n,$$
ce qui signifie que
$$\tau\big(\delta(u)\big) = u.$$
En particulier, quelle que soit la suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, il existe une suite $v = \delta(u)$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ telle que
$$u = \tau(v).$$
L'opérateur τ est donc surjectif.

c. D'après la question 2.c, l'opérateur δ n'est pas surjectif, et il n'est donc pas inversible. En particulier, l'opérateur τ n'est pas l'inverse de l'opérateur δ. En effet, nous vérifions que
$$\delta\big(\tau(u)\big)_0 = 0,$$
d'où par exemple,
$$\delta\big(\tau(e^0)\big)_0 \neq 1 = e^0_0,$$
ce qui implique que
$$\delta\big(\tau(e^0)\big) \neq e^0.$$

4.a. Nous calculons
$$\big\langle \delta(u), v\big\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(u)_n\, v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}\, v_n,$$
soit par le changement d'indices $m = n - 1$,
$$\big\langle \delta(u), v\big\rangle_{\ell^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m\, v_{m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m\, \tau(v)_m = \big\langle u, \tau(v)\big\rangle_{\ell^2}.$$
L'opérateur τ est donc l'adjoint de l'opérateur δ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{\ell^2}$.

b. Considérons d'abord une suite $u \in \operatorname{Ker}(\tau)$. D'après la question 4.a, nous avons alors

$$\forall v \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \big\langle \delta(v), u \big\rangle_{\ell^2} = \big\langle v, \tau(u) \big\rangle_{\ell^2} = \big\langle v, 0 \big\rangle_{\ell^2} = 0,$$

et la suite u appartient à l'orthogonal de l'image de l'opérateur δ. Réciproquement, si la suite u appartient à cet orthogonal, alors

$$\forall v \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \big\langle \delta(v), u \big\rangle_{\ell^2} = 0,$$

d'où par la question 4.a,

$$\big\langle v, \tau(u) \big\rangle_{\ell^2} = 0.$$

La suite $\tau(u)$ est donc orthogonale à toute suite v de $\ell^2(\mathbb{N})$, et elle est par conséquent identiquement nulle. La suite u appartient au noyau de l'opérateur τ, et nous concluons que

$$\operatorname{Ker}(\tau) = \operatorname{Im}(\delta)^{\perp}.$$

D'après la question 2.c, nous observons alors que

$$\operatorname{Ker}(\tau) = \operatorname{Vect}\big(e^0\big)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Vect}\big(e^0\big)}.$$

Sachant que le sous-espace $\operatorname{Vect}(e^0)$ est de dimension finie, il est fermé, et nous aboutissons à

$$\operatorname{Ker}(\tau) = \operatorname{Vect}\big(e^0\big) \neq \big\{0\big\}.$$

L'opérateur τ n'est donc pas injectif.

Exercice 2.

1.a. Par définition de l'opérateur τ, nous avons

$$\forall n \geq 0,\ \lambda u_n = \tau(u)_n = u_{n+1},$$

et la suite u est donc géométrique de raison λ. En particulier, il existe un nombre réel α tel que

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \alpha\, \lambda^n.$$

b. Soit $\mu \geq 0$. Rappelons que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \mu^n$ est convergente si et seulement si $0 \leq \mu < 1$. En particulier, une suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ si et seulement si $\mu = \lambda^2 < 1$, soit si et seulement si $|\lambda| < 1$. Dans ce cas, la question 5.a assure que cette suite appartient au noyau de l'opérateur $\tau - \lambda I$, qui n'est donc pas injectif.

Lorsque $|\lambda| \geq 1$ au contraire, nous déduisons de la question 5.a. que toute suite u de ce noyau s'écrit sous la forme

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \alpha\, \lambda^n,$$

pour un nombre réel α. Sachant que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ n'appartient pas à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, le nombre α est nécessairement nul, et la suite u est identiquement nulle. Le noyau de l'opérateur $\tau - \lambda I$ est donc réduit au singleton $\{0\}$, et cet opérateur est injectif. En définitive, l'opérateur $\tau - \lambda I$ est injectif si et seulement si $|\lambda| \geq 1$.

2.a. Rappelons que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |ab| \leq \frac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big).$$

En particulier, nous pouvons écrire

$$\big|\mu^{n-k-1}\, v_k\big| \leq \frac{1}{2}\big(\mu^{2(n-k-1)} + v_k^2\big).$$

Sachant d'une part que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mu^{2(n-k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu^{-2j-2} = \frac{1}{\mu^2(1-\frac{1}{\mu^2})} = \frac{1}{\mu^2-1} < +\infty,$$

puisque $\mu^2 > 1$, et d'autre part que la suite v appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_{k\geq n}(\mu^{2(n-k-1)} + v_k^2)$ est convergente, et par comparaison, la série $\sum_{k\geq n} \mu^{n-k-1}\, v_k$ est absolument convergente, donc convergente. En particulier, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.

De plus, nous déduisons de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\forall n \geq 0,\ u_n^2 \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{\frac{n-k-1}{2}}\, |\mu|^{\frac{n-k-1}{2}}\, |v_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1}\right)\left(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1}\, v_k^2\right).$$

Nous calculons alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} |\mu|^{-j-1} = \frac{1}{|\mu|-1},$$

par le changement d'indices $j = k - n$, d'où l'inégalité

$$u_n^2 \leq \frac{1}{|\mu|-1} \sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1}\, v_k^2.$$

b. Nous appliquons le théorème de Fubini pour les séries doubles à termes positifs. Considérons la suite double à termes positifs

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ t_{k,n} = \begin{cases} |\mu|^{n-k-1}\, v_k^2, \text{ si } k \geq n, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nous vérifions que

$$\forall k \geq 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n,k} = \sum_{n=0}^{k} |\mu|^{n-k-1}\, v_k^2 = \frac{1-|\mu|^{-k-1}}{|\mu|-1}\, v_k^2.$$

Sachant que

$$\forall k \geq 0,\ 0 \leq \frac{1-|\mu|^{-k-1}}{|\mu|-1}\, v_k^2 \leq \frac{1}{|\mu|-1} v_k^2,$$

et que la suite v appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_{k\geq 0}(\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n,k})$ est par comparaison convergente, et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1-|\mu|^{-k-1}}{|\mu|-1}\, v_k^2.$$

Par le théorème de Fubini, la série $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{+\infty} t_{n,k})$ est aussi convergente, de même somme. Par définition de la suite $(t_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$, la série $\sum_{n\geq 0}(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} v_k^2)$ est donc convergente, et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} |\mu|^{n-k-1} v_k^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1-|\mu|^{-k-1}}{|\mu|-1}\, v_k^2.$$

c. Il suffit de combiner les questions 2.a et 2.b pour obtenir la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ par le principe de comparaison. La suite u appartient donc à $\ell^2(\mathbb{N})$. De plus, elle vérifie

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} - \mu u_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^{n-k}\, v_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \mu^{n-k}\, v_k = \mu^{n-n} v_n = v_n,$$

ce qui équivaut au fait que

$$\tau(u) - \mu u = v,$$

par définition de l'opérateur adjoint τ.

d. La question 2.c assure la surjectivité de l'opérateur $\tau - \mu I$. Comme $|\tau| > 1$, il résulte de la question 1.b que cet opérateur est aussi injectif, donc bijectif.

3.a. Rappelons que la série de Riemann $\sum_{n\geq 0} 1/(n+1)^2$ est convergente. En particulier, la suite w est bien dans l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\tau(u) - u = w.$$

Par définition de l'opérateur τ, nous avons alors

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} - u_n = w_n,$$

de sorte que par récurrence sur $n \geq 1$,

$$\forall n \geq 1,\ u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Par divergence de la série de Riemann $\sum_{n\geq 0} 1/(n+1)$, nous savons que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

d'où la limite

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Comme la suite u est supposée appartenir à $\ell^2(\mathbb{N})$, nous savons par ailleurs que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

d'où une contradiction, et le fait qu'il n'existe pas de suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\tau(u) - u = w.$$

c. Considérons la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ z_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Comme

$$\forall n \geq 0, z_n^2 = w_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2},$$

la suite z appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$. Supposons par l'absurde qu'elle appartienne à l'image de l'opérateur $\tau + I$. Dans ce cas, il existe une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\tau(u) + u = z,$$

soit de manière équivalente,

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} + u_n = z_n.$$

Nous vérifions alors par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\forall n \geq 1,\ u_n = (-1)^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} z_k,$$

d'où par définition de la suite z,

$$u_n = (-1)^n \Big(u_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \Big).$$

Comme à la question 3.b, nous concluons que

$$u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty,$$

ce qui est absurde, puisque la suite u appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$. En conclusion, la suite z n'appartient pas à l'image de l'opérateur $\tau + I$.

d. D'après la question 2.d, l'opérateur $\tau - \mu I$ est bijectif lorsque $|\mu| > 1$, de sorte que

$$\sigma(\tau) \subset [-1, 1].$$

Par la question 1.c, l'opérateur $\tau - \mu I$ n'est pas injectif, donc pas bijectif lorsque $|\mu| < 1$, d'où l'inclusion

$$]-1, 1[\subset \sigma(\tau).$$

Enfin, les questions 3.b et 3.c assurent que les opérateurs $\tau - I$ et $\tau + I$ ne sont pas surjectifs, donc pas bijectifs. En particulier, les nombres 1 et -1 sont aussi dans le spectre de l'opérateur τ, qui est donc égal à

$$\sigma(\tau) = [-1, 1].$$