Corrigé du devoir à la maison N°2

1.a. Par définition, nous avons

$$L_0 = \frac{1}{2^0\,0!}\big(X^2-1\big)^0 = 1, \quad L_1 = \frac{1}{2^1\,1!}\Big[\big(X^2-1\big)^1\Big]' = X,$$

et

$$L_2 = \frac{1}{2^2\,2!}\Big[\big(X^2-1\big)^2\Big]'' = \frac{1}{2}\Big[X\big(X^2-1\big)\Big]' = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}.$$

b. La preuve repose sur une récurrence sur l'entier $m \geq 0$. Aux rangs $m = 0$ et $m = 1$, nous calculons

$$\big[PQ\big]^{(0)} = PQ = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(0-k)},$$

et

$$\big[PQ\big]^{(1)} = P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} P^{(k)} Q^{(1-k)}.$$

Supposons que la formule soit exacte jusqu'au rang m. Au rang $m+1$, nous obtenons

$$\big[PQ\big]^{(m+1)} = \Big[\big[PQ\big]^{(m)}\Big]' = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Big(P^{(k+1)}Q^{(m-k)} + P^{(k)}Q^{(m+1-k)}\Big).$$

Par le changement d'indice $j = k+1$, nous arrivons à

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} P^{(k+1)}Q^{(m-k)} = \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} P^{(j)}Q^{(m+1-j)},$$

de sorte que par la formule du triangle de Pascal,

$$\forall 1 \leq k \leq m, \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k},$$

nous concluons que

$$\begin{aligned}\big[PQ\big]^{(m+1)} =& PQ^{(m+1)} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} P^{(k)}Q^{(m+1-k)} + P^{(m+1)}Q \\ =& \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} P^{(k)}Q^{(m+1-k)}.\end{aligned}$$

La formule de Leibniz est ainsi démontrée par récurrence sur l'entier $m \geq 0$.

c. Nous déduisons de la formule du binôme de Newton que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k} = X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k},$$

où les termes dans la somme la plus à droite sont tous de degré strictement inférieur à $2n$. Par récurrence sur $0 \leq k \leq n$, nous vérifions que

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \big[P_n\big]^{(k)} = (2n)(2n-1)\dots(2n-k+1)\,X^{2n-k} + Q_n^k,$$

où les polynômes Q_n^k sont de degré strictement inférieur à $2n-k$. Comme $P_n^{(n)} = 2^n n!\,L_n$, le degré du polynôme L_n est égal à celui du polynôme $P_n^{(n)}$, donc à n, et son coefficient dominant vaut

$$\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

d. D'après la question 1.c, le degré du polynôme L_m est égal à m quel que soit $m \geq 0$. La famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est donc échelonnée et elle forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a. Soit $n \geq 0$. Nous calculons

$$P_n' = 2nX(X^2-1)^{n-1},$$

d'où la formule

$$(X^2-1)P_n' = 2nXP_n.$$

b. Nous appliquons d'abord la formule de Leibniz pour $P = X^2 - 1$ et $Q = P_n'$. Sachant que

$$P^{(k)} = X^2 - 1 \text{ si } k = 0,\ 2X \text{ si } k = 1,\ 2 \text{ si } k = 2,\ \text{ et } \ 0,\ \text{ sinon},$$

nous obtenons

$$\big[(X^2-1)P_n'\big]^{(n)} = (X^2-1)P_n^{(n+1)} + 2nXP_n^{(n)} + n(n-1)P_n^{(n-1)}.$$

Nous appliquons ensuite cette formule pour $P = X$ et $Q = P_n$. Comme à la question 3.b, nous arrivons à

$$\big[XP_n\big]^{(n)} = XP_n^{(n)} + nP_n^{(n-1)}.$$

D'après la question 2.a, il s'ensuit que

$$(1-X^2)P_n^{(n+1)} + n(n+1)P_n^{(n-1)} = 0.$$

Par définition du polynôme L_n, il suffit de dériver une dernière fois cette formule pour conclure que

$$\big[(1-X^2)L_n'\big]' + n(n+1)L_n = 0.$$

c. Soit $m \geq 0$. Nous intégrons par parties afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)L_m'(x)L_n'(x)\,dx &= \Big[(1-x^2)L_m'(x)L_n(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\big[(1-x^2)L_m'(x)\big]'L_n(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1}\big[(1-x^2)L_m'(x)\big]'L_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'introduire la formule de la question 4.b dans cette intégrale pour arriver à

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)L_m'(x)L_n'(x)\,dx = m(m+1)\int_{-1}^{1}L_m(x)L_n(x)\,dx.$$

d. Dans la formule de la question 2.c, les entiers m et n jouent un rôle symétrique dans l'intégrale de gauche. De façon équivalente, nous aurions pu montrer que

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2) L'_m(x) L'_n(x)\, dx = n(n+1) \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx,$$

de sorte que

$$\big(m(m+1) - n(n+1)\big) \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx = 0.$$

Comme

$$\forall x \geq 0,\ \big[x(x+1)\big]' = 2x+1 > 0,$$

la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, si $m \neq n$, alors $m(m+1) \neq n(n+1)$, de sorte que, par la formule précédente,

$$\int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx = 0.$$

e. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme la famille $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe des coordonnées $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$P = \sum_{m=0}^{n-1} a_m\, L_m.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) P(x)\, dx = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\, dx,$$

d'où d'après la question 2.d,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) P(x)\, dx = 0.$$

3.a. Nous utilisons la formule de Leibniz de la question 1.b. En effet, nous savons que

$$P_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n\,(X+1)^n.$$

Par récurrence sur $0 \leq k \leq n$, nous vérifions que

$$\big[(X-1)^n\big]^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)(X-1)^{n-k},$$

et

$$\big[(X+1)^n\big]^{(n-k)} = n(n-1)\ldots(k+1)(X+1)^k,$$

de sorte que, par la formule de Leibniz pour $P = (X-1)^n$ et $Q = (X+1)^n$,

$$\begin{aligned}
P_n^{(n)} =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\ldots(n-k+1)(X-1)^{n-k} \times n(n-1)\ldots(k+1)(X+1)^k \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(X+1)^k \\
=& n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.
\end{aligned}$$

Par définition du polynôme L_n, nous concluons que

$$L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

b. Nous déduisons de la formule de la question 3.a que

$$L_n(-1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1-1)^{n-k}(-1+1)^k = \frac{1}{2^n} \binom{n}{0}^2 (-2)^n = (-1)^n,$$

tandis que

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (1-1)^{n-k}(1+1)^k = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}^2 2^n = 1.$$

c. Nous intégrons par parties en posant $u(x) = x$ et $v(x) = L_n(x)^2$ afin d'obtenir

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx = \Big[x\, L_n(x)^2\Big]_{-1}^{1} - 2 \int_{-1}^{1} x\, L_n'(x)\, L_n(x)\, dx.$$

Nous déduisons alors de la question 3.b que

$$\Big[x\, L_n(x)^2\Big]_{-1}^{1} = L_n(1)^2 + L_n(-1)^2 = 2,$$

d'où la formule

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx = 2 - 2 \int_{-1}^{1} x\, L_n'(x)\, L_n(x)\, dx.$$

d. Vérifions d'abord que

$$P_{n+1}' = 2(n+1)X(X^2-1)^n = 2(n+1)X P_n,$$

et dérivons cette formule $n+1$ fois afin d'obtenir par la formule de Leibniz,

$$P_{n+1}^{(n+2)} = 2(n+1)X P_n^{(n+1)} + 2(n+1)^2 P_n^{(n)}.$$

Par définition des polynômes de Legendre, nous avons donc

$$2^{n+1}(n+1)!\, L_{n+1}' = 2(n+1)X\big(2^n n!\, L_n'\big) + 2(n+1)^2\big(2^n n!\, L_n\big),$$

ce qui se simplifie en la formule

$$L_{n+1}' = X\, L_n' + (n+1)L_n,$$

autrement dit

$$X\, L_n' = L_{n+1}' - (n+1)L_n.$$

e. Nous déduisons de la question 2.d que

$$\int_{-1}^{1} x\, L_n'(x)\, L_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} L_{n+1}'(x)\, L_n(x)\, dx - (n+1) \int_{-1}^{1} L_n(x)^2\, dx.$$

Nous pouvons alors intégrer par parties afin de calculer

$$\int_{-1}^{1} L_{n+1}'(x)\, L_n(x)\, dx = \Big[L_{n+1}(x)\, L_n(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L_{n+1}(x)\, L_n'(x)\, dx.$$

D'après la question 3.b, nous avons d'abord

$$\Big[L_{n+1}(x)\,L_n(x)\Big]_{-1}^{1} = L_{n+1}(1)\,L_n(1) - L_{n+1}(-1)\,L_n(-1) = 1 - (-1)^{2n+1} = 2.$$

Sachant que L_n' est un polynôme de degré strictement inférieur à $n+1$, nous avons aussi

$$\int_{-1}^{1} L_{n+1}(x)\,L_n'(x)\,dx = 0,$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{1} L_{n+1}'(x)\,L_n(x)\,dx = 2,$$

puis

$$\int_{-1}^{1} x\,L_n'(x)\,L_n(x)\,dx = 2 - (n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx.$$

Il résulte alors de la question 3.c que

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx = 2 - 4 + 2(n+1)\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx,$$

ce qui conduit à l'expression

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

f. Rappelons d'abord que les fonctions polynômes $(e_n)_{n\geq 0}$ sont continues sur $[-1,1]$, donc appartiennent à $L^2([-1,1],\mathbb{R})$. Nous déduisons de plus de la question 2.d que

$$\forall m \neq n,\ \langle e_m, e_n\rangle_{L^2} = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{2}\int_{-1}^{1} L_m(x)\,L_n(x)\,dx = 0,$$

tandis que par la question 3.e,

$$\|e_n\|_{L^2}^2 = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx = 1.$$

En conclusion, les fonctions polynômes $(e_n)_{n\geq 0}$ sont bien orthonormées dans $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

4.a. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Rappelons que le théorème de Weierstrass assure la densité du sous-espace des fonctions polynômes dans l'espace des fonctions continus $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc bien une fonction polynôme Q telle que

$$\sup_{x\in[-1,1]} \big|Q(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon.$$

b. Nous déduisons de l'inégalité de la question 4.a que

$$\int_{-1}^{1} \big(Q(x) - f(x)\big)^2\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sup_{y\in[-1,1]} \big|Q(y) - f(y)\big|^2\,dx \leq \varepsilon^2\int_{-1}^{1} dx = 2\varepsilon^2,$$

d'où l'inégalité

$$\big\|Q - f\big\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. Étant donnée une fonction $g \in L^2([-1,1],\mathbb{R})$, nous savons qu'il existe une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - g\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

D'après la question 4.b, il existe alors une fonction polynôme $Q \in \mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\|Q - f\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

Il suffit donc d'invoquer l'inégalité triangulaire pour arriver à

$$\|Q - g\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|q - f\|_{L^2} \leq (\sqrt{2} + 1)\varepsilon,$$

puis conclure que l'espace des fonctions polynômes $\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})$ est dense dans $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

d. D'après la question 1.c, la famille des polynômes de Legendre $(L_n)_{n\geq 0}$ est étagée. Par définition, la famille des fonctions polynômes $(e_n)_{n\geq 0}$ est-elle aussi étagée et constitue donc une base de l'espace des fonctions polynômes $\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\geq 0}.$$

Comme l'espace $\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})$ est dense dans $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ par la question 4.c, nous obtenons

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\geq 0}} = \overline{\mathcal{P}([-1,1],\mathbb{R})} = L^2([-1,1],\mathbb{R}),$$

ce qui assure que la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est totale. Puisqu'elle est orthonormée par la question 3.f, nous concluons qu'il s'agit d'une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

5.a. Introduisons le sous-espace $\mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Ce sous-espace est de dimension finie égale à 3, puisqu'il est engendré par les fonctions polynômes associées aux monômes 1, X et X^2. Il s'agit donc d'un sous-espace fermé de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$. Quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, nous pouvons donc invoquer le théorème de projection sur un convexe fermé pour affirmer l'existence d'une unique fonction polynôme $Q \in \mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})} \|f - P\|_{L^2} = \|f - Q\|_{L^2}.$$

D'après la question 1.d, nous savons alors que la famille (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Par définition, les fonctions e_0, e_1 et e_2 forment donc une base de $\mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})$, et il existe donc des nombres réels uniques α, β et γ tels que

$$\forall x \in [-1,1],\ Q(x) = \alpha e_0(x) + \beta e_1(x) + \gamma e_2(x).$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ et du sous-espace $\mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})$, nous concluons que

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - a - bx - cx^2\Big)^2\,dx = \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x)\Big)^2\,dx,$$

ce qui équivaut à l'inégalité à démontrer.

b. Rappelons que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace $\mathcal{P}_2([-1,1],\mathbb{R})$. Nous pouvons donc écrire l'inégalité de la question 5.a sous la forme

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - ae_0(x) - be_1(x) - ce_2(x)\Big)^2\,dx$$
$$\geq \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x)\Big)^2\,dx.$$

Pour a quelconque, $b = \beta$ et $c = \gamma$, nous pouvons développer les deux intégrales dans cette expression afin d'obtenir l'inégalité

$$\int_{-1}^{1} \Big(a^2 e_0(x)^2 - 2a e_0(x) \big(f(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x) \big) \Big) \, dx$$
$$\geq \int_{-1}^{1} \Big(\alpha^2 e_0(x)^2 - 2\alpha e_0(x) \big(f(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x) \big) \Big) \, dx.$$

Sachant que la famille (e_0, e_1, e_2) est orthonormée par la question 3.f, nous avons

$$\int_{-1}^{1} e_0(x)^2 \, dx = 1, \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{1} e_0(x) \, e_1(x) \, dx = \int_{-1}^{1} e_0(x) \, e_2(x) \, dx = 0.$$

En particulier, l'inégalité précédente se réduit à

$$a^2 - 2a \int_{-1}^{1} f(x) \, e_0(x) \, dx \geq \alpha^2 - 2\alpha \int_{-1}^{1} f(x) \, e_0(x) \, dx.$$

Autrement dit, la fonction $a \mapsto a^2 - 2a \int_{-1}^{1} e_0(x) \, f(x) \, dx$ atteint un minimum en $a = \alpha$. Sachant que cette fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée en $a = \alpha$ s'annule, ce qui donne l'identité

$$2\alpha - 2 \int_{-1}^{1} e_0(x) \, f(x) \, dx = 0,$$

soit

$$\alpha = \langle f, e_0 \rangle_{L^2}.$$

Pour b quelconque, $a = \alpha$ et $c = \gamma$, nous obtenons de façon similaire que

$$\beta = \langle f, e_1 \rangle_{L^2},$$

et pour c quelconque, $a = \alpha$ et $b = \beta$, que

$$\gamma = \langle f, e_2 \rangle_{L^2}.$$

c. Par définition de la norme $\| \cdot \|_{L^2}$, nous avons

$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x) \Big)^2 \, dx = \big\| f - \alpha e_0 - \beta e_1 - \gamma e_2 \big\|_{L^2}^2.$$

Comme la famille (e_0, e_1, e_2) est orthonormée par la question 3.f, nous pouvons développer l'expression précédente sous la forme

$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x) \Big)^2 \, dx$$
$$= \big\| f \big\|_{L^2}^2 - 2\alpha \langle f, e_0 \rangle_{L^2} - 2\beta \langle f, e_1 \rangle_{L^2} - 2\gamma \langle f, e_2 \rangle_{L^2} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

d'où d'après la question 5.b,

$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x) - \alpha e_0(x) - \beta e_1(x) - \gamma e_2(x) \Big)^2 \, dx = \big\| f \big\|_{L^2}^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

puis par la question 5.a, et toujours par la question 5.b,

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - a - bx - cx^2 \Big)^2 \, dx \geq \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx - \langle f, e_0 \rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_1 \rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_2 \rangle_{L^2}^2.$$

d. Nous appliquons le résultat de la question 5.c à la fonction $f(x) = \cos(\pi x)$ qui appartient bien à l'espace $L^2([-1,1],\mathbb{R})$. Nous commençons par calculer

$$\int_{-1}^{1} \cos(\pi x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \big(\cos(2\pi x) + 1 \big) \, dx = \frac{1}{2} \Big[\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} + x \Big]_{-1}^{1} = 1.$$

D'après la question 1.a, nous calculons ensuite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x,$$

tandis que

$$e_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} L_1(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} \big(3x^2 - 1 \big).$$

Nous vérifions alors que

$$\int_{-1}^{1} \cos(\pi x) \, dx = \Big[\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \Big]_{-1}^{1} = 0.$$

Nous déduisons ensuite du changement de variables $y = -x$ que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x \, \cos(\pi x) \, dx &= \int_{-1}^{0} x \, \cos(\pi x) \, dx + \int_{0}^{1} x \, \cos(\pi x) \, dx \\ &= - \int_{0}^{1} y \, \cos(\pi y) \, dy + \int_{0}^{1} x \, \cos(\pi x) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Nous intégrons enfin par parties afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x) \, dx &= \Big[\frac{x^2 \, \sin(\pi x)}{\pi} \Big]_{-1}^{1} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x \, \sin(\pi x) \, dx \\ &= - \frac{2}{\pi} \Big[- \frac{x \, \cos(\pi x)}{\pi} \Big]_{-1}^{1} - \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{2} \cos(\pi x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \big(\cos(\pi) + \cos(-\pi) \big) - \frac{2}{\pi^2} \Big[\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \Big]_{-1}^{1} = - \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, e_0(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \cos(\pi x) \, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, e_1(x) \, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x \, \cos(\pi x) \, dx = 0,$$

et

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, e_2(x) \, dx = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} \big(3x^2 - 1 \big) \, \cos(\pi x) \, dx = - \frac{6}{\pi^2} \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Nous concluons que

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx - \langle f, e_0 \rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_1 \rangle_{L^2}^2 - \langle f, e_2 \rangle_{L^2}^2 = 1 - \frac{90}{\pi^4},$$

puis par la question 5.c que

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \Big(\cos(x) - a - bx - cx^2 \Big)^2 \, dx = 1 - \frac{90}{\pi^4}.$$