Corrigé du devoir à la maison N°1

Exercice 1.

1.a. Commençons par vérifier que la fonction F est bien définie sur $]-1,1[$. Nous savons en effet que

$$|\sin(t)| \leq 1,$$

de sorte que

$$\big|2x\sin(t)\big| \leq 2|x|.$$

Nous pouvons donc estimer le dénominateur de la fonction F par

$$1 + x^2 + 2x\,\sin(t) \geq 1 + x^2 - \big|2x\sin(t)\big| \geq 1 + x^2 - 2|x| = \big(1-|x|\big)^2.$$

Comme $(1-|x|)^2 > 0$ lorsque $x \in]-1,1[$, nous concluons que le dénominateur de la fonction F ne s'annule pas sur $]-1,1[$, ce qui assure que cette fonction est bien définie sur cet intervalle.

Nous savons par ailleurs que

$$|ie^{it}| = 1 > |x|, \quad \text{et} \quad |ie^{-it}| = 1 > |x|,$$

pour $x \in]-1,1[$. Les nombres $ie^{it} - x$ et $ie^{-it} + x$ sont donc non nuls, et les fractions rationnelles $ie^{it}/(ie^{it}-x)$ et $ie^{-it}/(ie^{-it}+x)$ sont bien définies. Nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned} -1 + \frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} + \frac{ie^{-it}}{ie^{-it}+x} &= -1 + \frac{2i^2 + ix(e^{it}-e^{-it})}{i^2 - x^2 + ix(e^{it}-e^{-it})} \\ &= -1 + \frac{2 + 2\,x\,\sin(t)}{1 + x^2 + 2\,x\,\sin(t)}, \end{aligned}$$

puisque

$$i(e^{it}-e^{-it}) = -\frac{e^{it}-e^{-it}}{i} = -2\sin(t).$$

Il suffit alors de réduire l'expression précédente au même dénominateur pour conclure que

$$-1 + \frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} + \frac{ie^{-it}}{ie^{-it}+x} = \frac{1-x^2}{1+x^2+2x\,\sin(t)} = F(x).$$

b. Nous écrivons

$$\frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{ie^{it}}} = \frac{1}{1+i\,x\,e^{-it}},$$

et observons que

$$\big|-i\,x\,e^{-it}\big| = |x| < 1.$$

Rappelons alors que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ est convergente dès que $|z| < 1$, et que sa somme vaut dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{1}{1+i\,x\,e^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(-ie^{-it}x\big)^n,$$

ce qui conduit à la formule

$$\frac{ie^{it}}{ie^{it}-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n e^{-int} x^n.$$

c. Nous écrivons de même

$$\frac{ie^{-it}}{ie^{-it}+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{ie^{-it}}} = \frac{1}{1-ie^{it}x}.$$

Sachant que

$$\big|ie^{it}x\big| = |x| < 1,$$

nous pouvons développer cette expression sous la forme

$$\frac{ie^{-it}}{ie^{-it}+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(ie^{it}x\big)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n e^{int} x^n.$$

D'après les questions 1.a et 1.b, nous concluons que

$$F(x) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n e^{-int} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} i^n e^{int} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((-1)^n e^{-int} + e^{int}\big)\, i^n\, x^n.$$

2.a. Soit $0 \leq \theta < \pi/2$. Rappelons d'abord que

$$\cos(\theta) = 2\,\cos^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - 1, \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = 2\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big).$$

Observons ensuite que, pour $0 \leq \theta < \pi/2$, le nombre $\tan(\theta/2)$ est bien défini par l'expression

$$\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big) = \frac{\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)}{\cos\big(\frac{\theta}{2}\big)},$$

d'où nous déduisons la formule

$$1+\tan^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big) = \frac{\cos^2\big(\frac{\theta}{2}\big)+\sin^2\big(\frac{\theta}{2}\big)}{\cos^2\big(\frac{\theta}{2}\big)} = \frac{1}{\cos^2\big(\frac{\theta}{2}\big)},$$

puis l'expression

$$\cos(\theta) = \frac{2}{1+\tan^2\big(\frac{\theta}{2}\big)} - 1 = \frac{1-\tan^2\big(\frac{\theta}{2}\big)}{1+\tan^2\big(\frac{\theta}{2}\big)}.$$

Nous obtenons de même

$$\sin(\theta) = 2\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\cos^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big) = \frac{2\tan\big(\frac{\theta}{2}\big)}{1+\tan^2\big(\frac{\theta}{2}\big)}.$$

b. Lorsque $0 \leq \theta < \pi/2$, le nombre

$$x = \tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big),$$

appartient à l'intervalle $[0,1[$, et nous pouvons donc calculer

$$F\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\sin(t)}.$$

Après avoir factorisé cette expression par $1+\tan^2(\theta/2)$, nous obtenons

$$F\Big(\tan\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big) = \frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)\,\sin(t)} = \cos(\theta)\,h_\theta(t).$$

Comme $0 \leq \theta < \pi/2$, le nombre $\cos(\theta)$ est strictement positif, et nous pouvons utiliser la formule de la question 1.c pour développer la fonction h_θ en la série trigonométrique

$$\forall t \in \mathbb{R},\, h_\theta(t) = \frac{1}{\cos(\theta)}\bigg(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big((-1)^n e^{-int} + e^{int}\big)\, i^n\, \tan^n\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\bigg).$$

Observons alors que

$$\forall n \geq 1,\, \forall t \in \mathbb{R},\, \Big|\big((-1)^n e^{-int} + e^{int}\big)\, i^n\, \tan^n\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big| \leq 2\tan^n\Big(\frac{\theta}{2}\Big).$$

Sachant que le nombre $\tan(\theta/2)$ appartient à l'intervalle $[0,1[$, la série géométrique $\sum_{n\geq 1} \tan^n(\theta/2)$ est convergente, ce qui assure la convergence normale de la série trigonométrique

$$\frac{1}{\cos(\theta)} + \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{(-1)^n\, i^n\, \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos(\theta)}\, e^{-int} + \frac{i^n\, \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos(\theta)}\, e^{int}\Big).$$

Par conséquent, cette série trigonométrique est la série de Fourier de sa fonction somme h_θ. Les coefficients de Fourier de cette fonction sont donc égaux à

$$c_0\big(h_\theta\big) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \forall n \geq 1,\, c_n\big(h_\theta\big) = \frac{i^n\, \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos(\theta)},$$

et

$$\forall n \geq 1,\, c_{-n}\big(h_\theta\big) = \frac{(-i)^n\, \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos(\theta)}.$$

c. Pour $\theta = \pi/3$, nous savons que

$$\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, h_{\frac{\pi}{3}}(t) = \frac{2}{2+\sqrt{3}\,\sin(t)}.$$

Par définition des coefficients de Fourier de cette fonction, nous avons donc

$$I_0 = \pi\, a_0\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big), \quad \forall m \geq 1,\, I_m = \frac{\pi}{2}\, a_m\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big),$$

et

$$\forall n \geq 1,\, J_n = \frac{\pi}{2}\, b_n\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big).$$

Rappelons alors que

$$a_0\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = c_0\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big),$$

tandis que

$$\forall p \geq 1,\ a_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = c_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) + c_{-p}\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big), \quad \text{et} \quad b_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = i\Big(c_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) - c_{-p}\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big)\Big).$$

Comme

$$\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \tan\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

nous déduisons de la question 2.b que

$$a_0\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = 2,$$

puis

$$\forall p \geq 1,\ a_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = \frac{2\big(i^p + (-i)^p\big)}{3^{\frac{p}{2}}},$$

et enfin

$$\forall p \geq 1,\ b_p\big(h_{\frac{\pi}{3}}\big) = \frac{2i\big(i^p - (-i)^p\big)}{3^{\frac{p}{2}}}.$$

En conclusion, nous obtenons

$$I_0 = 2\pi,$$

et

$$\forall m \geq 1,\ I_m = \begin{cases} \frac{2\pi(-1)^p}{3^p} \text{ si } m = 2p, \\ 0 \text{ si } m = 2p+1, \end{cases}$$

et de même,

$$\forall n \geq 1,\ J_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p, \\ \frac{2\pi(-1)^{p+1}}{3^p\sqrt{3}} \text{ si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Exercice 2.

1.a. Rappelons d'abord que la fonction f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les intégrales sur un segment considérées ici sont donc bien définies. Nous pouvons en particulier utiliser le changement de variables $x = \sqrt{y}$ pour obtenir l'expression

$$\forall R > 1,\ \int_1^R f(x)\,dx = \int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

b. Nous intégrons par parties en posant

$$\forall y \in [1, R^2],\ u(y) = \frac{e^{iy}}{i}, \quad \text{et} \quad v(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Les fonctions u et v sont en effet bien définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, R^2]$, et elles satisfont

$$\forall y \in [1, R^2],\ u'(y) = e^{iy}, \quad \text{et} \quad v'(y) = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{\sqrt{y}} &= \Big[\frac{e^{iy}}{i\sqrt{y}}\Big]_1^{R^2} + \frac{1}{2i}\int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e^{iR^2}}{iR} - \frac{e^i}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

c. Rappelons d'abord que les intégrales de la fonction f sur tout segment de la forme $[-R, S]$ sont bien définies, puisque cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. À l'aide de la formule de Chasles, nous pouvons donc écrire

$$\int_{-R}^{S} f(x)\,dx = \int_{-R}^{-1} e^{ix^2}\,dx + \int_{-1}^{1} e^{ix^2}\,dx + \int_{1}^{S} e^{ix^2}\,dx,$$

puis par le changement de variables $z = -x$,

$$\int_{-R}^{S} f(x)\,dx = \int_{1}^{R} e^{iz^2}\,dz + \int_{-1}^{1} e^{ix^2}\,dx + \int_{1}^{S} e^{ix^2}\,dx.$$

D'après les questions 1.a et 1.b, nous avons alors

$$\int_{1}^{R} e^{iz^2}\,dz = \frac{e^{iR^2}}{2iR} - \frac{e^{i}}{2i} + \frac{1}{4i}\int_{1}^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

Rappelons ici que la fonction $t \mapsto y^{-3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Sachant que

$$\forall y \geq 1, \Big|\frac{e^{iy}}{y^{\frac{3}{2}}}\Big| \leq \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}},$$

la fonction $y \mapsto e^{iy}\,y^{-3/2}$ est elle-aussi intégrable sur cet intervalle, ce qui assure que

$$\int_{1}^{R^2} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \underset{R\to+\infty}{\to} \int_{1}^{+\infty} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme

$$\Big|\frac{e^{iR^2}}{2iR}\Big| = \frac{1}{2R} \underset{R\to+\infty}{\to} 0,$$

nous concluons que

$$\int_{1}^{R} e^{iz^2}\,dz \underset{R\to+\infty}{\to} -\frac{e^{i}}{2i} + \frac{1}{4i}\int_{1}^{+\infty} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous déduisons de cette convergence que

$$\int_{1}^{S} e^{iz^2}\,dz \underset{S\to+\infty}{\to} -\frac{e^{i}}{2i} + \frac{1}{4i}\int_{1}^{+\infty} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}},$$

et enfin que

$$\int_{-R}^{S} e^{ix^2}\,dx \underset{R,S\to+\infty}{\to} \ell,$$

où

$$\ell = \int_{-1}^{1} e^{ix^2}\,dx - \frac{e^{i}}{i} + \frac{1}{2i}\int_{1}^{+\infty} e^{iy}\,\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

2.a. La fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$. De plus, elle satisfait

$$g(x) \underset{x\to(-\pi)^+}{\to} e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to\pi^-}{\to} e^{\frac{i\pi}{2}} = i.$$

Par 2π-périodicité, elle est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\forall x \in]-\pi, \pi[,\ g'(x) = \frac{ix}{\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}},$$

elle vérifie aussi

$$g'(x) \underset{x\to(-\pi)^+}{\longrightarrow} -i\,e^{\frac{i\pi}{2}} = 1, \quad \text{ et } \quad g'(x) \underset{x\to\pi^-}{\longrightarrow} i\,e^{\frac{i\pi}{2}} = -1.$$

Par 2π-périodicité, il s'agit donc d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Par définition, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{Z},\, c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, e^{-inx}\,dx.$$

Comme

$$\frac{ix^2}{2\pi} - inx = \frac{i(x-n\pi)^2}{2\pi} - \frac{i\pi n^2}{2},$$

nous déduisons de la formule $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}\,e^{\beta}$ que

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i(x-\pi n)^2}{2\pi}}\,dx.$$

c. Lorsque $n = 2k$ est pair, nous calculons

$$e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} = e^{-2i\pi k^2} = 1,$$

tandis que pour $n = 2k+1$ impair, nous avons

$$e^{-\frac{i\pi n^2}{2}} = e^{-i\pi\left(2k^2+2k+\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

d. Nous décomposons la somme à calculer en ses termes pairs et impairs

$$\forall N \geq 0,\, \sum_{k=-2N-1}^{2N+1} c_k(g) = \sum_{k=-N}^{N} c_{2k}(g) + \sum_{k=-(N+1)}^{N} c_{2k+1}(g).$$

D'après les questions 2.b et 2.c, nous savons alors que

$$c_{2k}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i(x-2k\pi)^2}{2\pi}}\,dx,$$

d'où par le changement de variables $y = x - 2k\pi$,

$$c_{2k}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(2k+1)\pi}^{-(2k-1)\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\,dy.$$

Nous déduisons donc de la formule de Chasles que

$$\sum_{k=-N}^{N} c_{2k}(g) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\int_{-(2k+1)\pi}^{-(2k-1)\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\,dy.$$

De façon similaire, nous calculons

$$c_{2k+1}(g) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i(x-(2k+1)\pi)^2}{2\pi}}\,dx,$$

puis

$$c_{2k+1}(g) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-2(k+1)\pi}^{-2k\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\,dy,$$

par le changement de variables $y = x - (2k+1)\pi$. Par la formule de Chasles, il vient alors

$$\sum_{k=-(N+1)}^{N} c_{2k+1}(g) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-(N+1)}^{N} \int_{-2(k+1)\pi}^{-2k\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\, dy = -\frac{i}{2\pi} \int_{-2(N+1)\pi}^{2(N+1)\pi} e^{\frac{iy^2}{2\pi}}\, dy,$$

de sorte que

$$\sum_{k=-2N-1}^{2N+1} c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-2(N+1)\pi}^{2(N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, dx.$$

e. Comme la fonction g est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer le théorème de Dirichlet afin d'établir que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)$ est convergente de somme égale à

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) e^{in\times 0} = g(0) = 1.$$

Nous déduisons de cette convergence que

$$\sum_{k=-2N-1}^{2N+1} c_k(g) \underset{N\to+\infty}{\to} 1.$$

Nous observons par ailleurs à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{2\pi}y$ que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(2N+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{(2N+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{iy^2}\, dy.$$

D'après la question 1.c, nous obtenons donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, dx \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy.$$

Nous pouvons raisonner de façon similaire pour établir que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2(N+1)\pi}^{2(N+1)\pi} e^{\frac{ix^2}{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(N+1)\sqrt{2\pi}}^{(N+1)\sqrt{2\pi}} e^{iy^2}\, dy \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy,$$

puis passer à la limite $N \to +\infty$ dans la formule de la question 2.d pour conclure que

$$1 = \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy.$$

En définitive, nous avons bien montré que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(1+i\big).$$