Corrigé du devoir à la maison N°1

Exercice 1.

1.a. Rappelons que la fonction cosinus hyperbolique est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 0 qui est égal à $\mathrm{ch}(0)=1$. En particulier,

$$\forall \alpha > 0,\ \mathrm{ch}(\alpha) > 1.$$

Comme la fonction cosinus est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x) > 0.$$

Il résulte alors des opérations élémentaires sur les fonctions que la fonction f_α est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Sachant que

$$\mathrm{sh}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

nous vérifions que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)}\Big(\frac{1}{1-e^{ix-\alpha}} + \frac{e^{-ix-\alpha}}{1-e^{-ix-\alpha}}\Big) &= \frac{2\big(1-e^{-ix-\alpha}+e^{-ix-\alpha}-e^{-2\alpha}\big)}{\big(e^\alpha - e^{-\alpha}\big)\big(1-e^{ix-\alpha}\big)\big(1-e^{-ix-\alpha}\big)}\\ &= \frac{2\big(1-e^{-2\alpha}\big)}{\big(1-e^{-2\alpha}\big)\big(e^\alpha - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-\alpha}\big)},\end{aligned}$$

d'où par définition des fonctions cosinus et cosinus hyperboliques,

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)}\Big(\frac{1}{1-e^{ix-\alpha}} + \frac{e^{-ix-\alpha}}{1-e^{-ix-\alpha}}\Big) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x)} = f_\alpha(x).$$

2.a. Rappelons que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ est absolument convergente quel que soit le nombre complexe z tel que $|z|<1$, et que sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Lorsque le nombre α est strictement positif, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big|e^{ix-\alpha}\big| = e^{-\alpha} < 1,$$

d'où l'expression

$$\frac{1}{1-e^{ix-\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{inx-\alpha n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\, e^{inx}.$$

b. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big|e^{-ix-\alpha}\big| = e^{-\alpha} < 1,$$

nous déduisons de même du développement de la série géométrique que

$$\frac{1}{1 - e^{-ix-\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n}\, e^{-inx}.$$

D'après la question 1.b, nous obtenons

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n}\, e^{inx} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha(n+1)} e^{-i(n+1)x} \Big),$$

d'où par la formule de Chasles et le changement d'indices $m = n + 1$,

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)} \Big(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\alpha m} \Big(e^{imx} + e^{-imx} \Big) \Big).$$

Par définition de la fonction cosinus, nous concluons que

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)} \Big(1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\alpha m}\, \cos(mx) \Big).$$

3.a. La fonction cosinus, et donc la fonction f_α, sont 2π-périodiques, continues et paires sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier $(b_n(f_\alpha))_{n\geq 1}$ de cette fonction sont donc bien définis et valent

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f_\alpha) = 0.$$

b. Soit $n \geq 0$. Étant donné un entier $m \geq 1$, nous calculons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big| e^{-\alpha m}\, \cos(mx)\, \cos(nx) \big| \leq e^{-\alpha m}.$$

Comme le nombre α est strictement positif, le nombre $e^{-\alpha}$ est strictement inférieur à 1, et la série géométrique $\sum_{m\geq 1} e^{-\alpha m}$ est convergente. La série $\sum_{m\geq 1} e^{-\alpha m}\, \cos(mx)\, \cos(nx)$ est par conséquent normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, nous déduisons du théorème de permutation des séries et des intégrales que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\alpha m}\, \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx = \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha m}\, \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx.$$

Par définition des coefficients de Fourier $(a_n(f_\alpha))_{n\geq 0}$ et par linéarité de l'intégrale, il résulte alors du développement de la question 2.b que

$$a_0(f_\alpha) = \frac{1}{2\pi \mathrm{sh}(\alpha)} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} dx + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\alpha m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, dx \Big).$$

tandis que

$$\forall n \geq 1,\ a_n(f_\alpha) = \frac{1}{\pi \mathrm{sh}(\alpha)} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\alpha m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, \cos(nx)\, dx \Big),$$

Sachant que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 0, \\ 0, \text{ sinon}, \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,\cos(nx)\,dx=\begin{cases}1, & \text{si } n=m,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

nous concluons que

$$a_0(f_\alpha)=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)},\qquad \text{et}\qquad \forall n\geq 1,\ a_n(f_\alpha)=\frac{2\,e^{-n\alpha}}{\mathrm{sh}(\alpha)}.$$

c. Par définition de la fonction f_α, nous savons que

$$I_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_\alpha(x)\,dx,$$

puis par parité de cette fonction, et par définition du coefficient de Fourier $a_0(f_\alpha)$,

$$I_\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\alpha(x)\,dx=a_0(f_\alpha).$$

Il résulte donc de la question 3.b que

$$I_\alpha=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)}.$$

De façon similaire, nous vérifions que

$$J_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_\alpha(x)^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\alpha(x)^2\,dx.$$

Comme la fonction f_α est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval assure que

$$J_\alpha=a_0(f_\alpha)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f_\alpha)^2+b_n(f_\alpha)^2\big)=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)^2}\Big(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2n\alpha}\Big).$$

Puisque $0<e^{-2\alpha}<1$, le changement d'indices $n=m+1$ fournit alors l'expression

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2n\alpha}=e^{-2\alpha}\sum_{m=0}^{+\infty}e^{-2m\alpha}=\frac{e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}},$$

d'où la formule

$$J_\alpha=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)^2}\Big(1+\frac{2\,e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}\Big)=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)^2}\frac{1+e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}=\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha)^2}\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}=\frac{\mathrm{ch}(\alpha)}{\mathrm{sh}(\alpha)^3}.$$

Exercice 2.

1.a. Étant donné un nombre réel x fixé, la fonction $y\mapsto x-y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions f et g sont aussi continues sur $\mathbb{R}$, il résulte des opérations élémentaires sur les fonctions que la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $f*g(x)$ a donc un sens, ce qui assure que la fonction $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, cette intégrale satisfait

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f*g(x+2\pi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2\pi-y)\,g(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,g(y)\,dy=f*g(x),$$

par 2π-périodicité de la fonction f. La fonction $f * g$ est donc aussi 2π-périodique.

b. Sachant que les fonctions $(x, y) \mapsto x - y$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, il résulte de la continuité des fonctions f et g, et des opérations élémentaires sur les fonctions que l'application $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Elle est donc continue sur le sous-ensemble compact $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [-\pi, \pi]$. Par le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur ce compact : étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe en particulier un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ \forall y \in [-\pi, \pi],\ \big|f(x-y)g(y) - f(x_0 - y)g(y)\big| < \varepsilon.$$

c. Étant donnés un nombre réel x_0 fixé et un nombre $\varepsilon > 0$, considérons le nombre $\delta > 0$ donné par la question 1.b, et calculons

$$\begin{aligned}\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ \big|f * g(x) - f * g(x_0)\big| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x-y)g(y) - f(x_0 - y)g(y)\big|\, dy \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

Le produit de convolution $f * g$ est donc continu en x_0, et par suite sur $\mathbb{R}$.

2.a. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)}\, f(y)\, dy = \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}\, f(y)\, dy\bigg) e^{inx},$$

d'où par définition du coefficient de Fourier $c_n(f)$,

$$e_n * f(x) = c_n(f) e^{inx},$$

soit de façon équivalente,

$$e_n * f = c_n(f)\, e_n.$$

b. Supposons par l'absurde que le produit de convolution admette un élément neutre $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Nous déduisons alors de la question 2.a que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f)\, e_n = e_n * f = e_n,$$

ce qui assure que

$$c_n(f) = 1 \underset{n \to +\infty}{\to} 1.$$

Comme la fonction f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, le lemme de Riemann-Lebesgue assure en parallèle que

$$c_n(f) \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

ce qui est contradictoire. En conclusion, le produit de convolution n'a pas d'élément neutre $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3.a. Les questions 1.a et 1.c assurent que le produit de convolution $f * g$ est 2π-périodique et continu sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier $(c_n(f * g))_{n \geq 0}$ sont donc bien définis et valent

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \bigg(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\, dy \bigg) e^{-inx}\, dx.$$

Comme la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)\,e^{-inx}$ est continue sur $[-\pi,\pi]^2$, le théorème de Fubini conduit à l'expression

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,e^{-inx}\,dx\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-in(x-y)}\,dx\right)g(y)\,e^{-iny}\,dy. \end{aligned}$$

Par le changement de variables $z = x - y$, nous calculons alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-in(x-y)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(z)\,e^{-inz}\,dz,$$

puis par 2π-périodicité de la fonction $z \mapsto f(z)\,e^{-inz}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,e^{-in(x-y)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\,e^{-inz}\,dz = c_n(f).$$

Nous concluons donc par définition du coefficient de Fourier $c_n(g)$ que

$$c_n(f*g) = c_n(f)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,e^{-iny}\,dy\right) = c_n(f)\,c_n(g).$$

b. Nous appliquons la formule de la question 3.a pour obtenir d'une part

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\big(f*(g*h)\big) = c_n(f)\,c_n(g*h) = c_n(f)\,c_n(g)\,c_n(h),$$

et d'autre part,

$$c_n\big((f*g)*h\big) = c_n(f*g)\,c_n(h) = c_n(f)\,c_n(g)\,c_n(h),$$

ce qui suffit à montrer que

$$c_n\big(f*(g*h)\big) = c_n\big((f*g)*h\big).$$

c. D'après les questions 1.a et 1.c, les produits de convolution $f*g$, $g*h$, $(f*g)*h$ et $f*(g*h)$ sont bien définis, 2π-périodiques et continus sur $\mathbb{R}$. De plus, la question 3.b assure que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\big(f*(g*h)\big) = c_n\big((f*g)*h\big).$$

Par injectivité des coefficients de Fourier, il s'ensuit que

$$f*(g*h) = (f*g)*h,$$

c'est-à-dire que le produit de convolution est associatif.

d. Rappelons que les produits de convolution $f*g$ et $g*f$ sont bien définis, 2π-périodiques et continus sur $\mathbb{R}$. D'après la question 3.a, ils satisfont

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f*g) = c_n(f)\,c_n(g) = c_n(g)\,c_n(f) = c_n(g*f).$$

Par injectivité des coefficients de Fourier, nous concluons que

$$f*g = g*f,$$

soit que le produit de convolution est commutatif.

4.a Pour $n \in \mathbb{Z}$, nous calculons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_n * e_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)}\, e^{iny}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dy = e^{inx} = e_n(x),$$

d'où l'identité

$$e_n * e_n = e_n.$$

b. Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f * f = f$. La question 3.a assure que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f)^2 = c_n(f),$$

soit que $c_n(f) = 0$ ou $c_n(f) = 1$. Sachant que

$$c_n(f) \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

il existe un nombre fini d'indices $0 \leq n_1 < \ldots < n_d$ tels que

$$\forall 1 \leq j \leq d,\ c_{n_j}(f) = 1,$$

et pour tout entier n différent de ces indices, $c_n(f) = 0$. Introduisons alors le polynôme trigonométrique

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{j=1}^{d} e^{in_j x}.$$

Ce polynôme satisfait

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(P) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = n_j \text{ pour } 1 \leq j \leq d, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

de sorte que ses coefficients de Fourier sont identiques à ceux de la fonction f. Par injectivité des coefficients de Fourier, nous obtenons donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x) = \sum_{j=1}^{d} e^{in_j x}.$$

Par linéarité de l'intégrale, nous vérifions alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P * P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{d} e^{in_j(x-y)}\, P(y)\, dy = \sum_{j=1}^{d} e_{n_j} * P(x),$$

d'où par la question 2.a,

$$P * P(x) = \sum_{j=1}^{d} c_{n_j}(P)\, e_{n_j}(x) = \sum_{j=1}^{d} e_{n_j}(x) = P(x).$$

En conclusion, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que $f * f = f$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques de la forme

$$P(x) = \sum_{j=1}^{d} e^{in_j x},$$

pour un choix fini quelconque d'indices $0 \leq n_1 < \ldots < n_d$.

5.a. La fonction f est bien définie et paire sur $\mathbb{R}$, continue sur $[-\pi, \pi]$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$, avec

$$\forall x \in]-\pi, 0[,\ f'(x) = -1, \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, \pi[,\ f'(x) = 1.$$

De plus, elle satisfait

$$f(x) \underset{x \to \pm\pi}{\rightarrow} \pi,$$

et s'avère donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme

$$f'(x) \underset{x \to \pm\pi^{\mp}}{\rightarrow} \pm 1, \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x \to 0^{\pm}}{\rightarrow} \pm 1,$$

elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Par définition, nous calculons

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\Big(- \int_{-\pi}^{0} x\, e^{-inx}\, dx + \int_0^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx \Big),$$

d'où par le changement de variables $y = -x$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} y\, e^{iny}\, dy + \int_0^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx \Big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, \cos(nx)\, dx.$$

Lorsque $n = 0$, cette expression vaut

$$c_0(f) = \frac{\pi}{2},$$

tandis que pour $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \Big[\frac{x\, \sin(nx)}{n\pi} \Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2 \pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}.$$

c. Par le changement de variables $z = -y$, puis par parité de la fonction f, nous vérifions que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x - y)\, f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z - x)\, f(-z)\, dz = f * f(x),$$

ce qui assure que la fonction $f * f$ est paire. De plus, elle satisfait

$$\forall x \in [0, \pi],\ f * f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x - y)\, y\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{x} f(x - y)\, y\, dy.$$

Lorsque $x - \pi \leq y \leq x + \pi$, nous savons que $f(x - y) = |x - y|$, tandis que pour $x - 3\pi \leq y \leq x - \pi$, par 2π- périodicité, $f(x - y) = |x - y - 2\pi|$, d'où par la formule de Chasles,

$$\begin{aligned} f * f(x) = \frac{1}{2\pi}\Big(& - \int_{-\pi}^{x-\pi} (2\pi - x + y)\, y\, dy - \int_{x-\pi}^{0} (x - y)\, y\, dy \\ & + \int_0^{x} (x - y)\, y\, dy - \int_x^{\pi} (x - y)\, y\, dy \Big), \end{aligned}$$

puis

$$f*f(x)=\frac{1}{2\pi}\Big(-\Big[\pi y^2-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\Big]_{-\pi}^{x-\pi}-\Big[\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big]_{x-\pi}^{0}+\Big[\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big]_{0}^{x}-\Big[\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big]_{x}^{\pi}\Big).$$

Après simplification, nous concluons que

$$f*f(x)=\frac{1}{6\pi}\Big(2x^3-3\pi x^2+2\pi^3\Big).$$

d. Comme la fonction $f*f$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, nous pouvons écrire la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f*f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f*f(x)|^2\,dx.$$

Par les questions 3.a et 5.b, nous savons que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f*f)|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^4=\frac{\pi^4}{16}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big((-1)^n-1\big)^4}{n^8\pi^4},$$

soit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f*f)|^2=\frac{\pi^4}{16}+\frac{32}{\pi^4}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^8}.$$

Nous avons donc

$$\frac{\pi^4}{16}+\frac{32}{\pi^4}S=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f*f(x)|^2\,dx.$$

Par parité de la fonction $f*f$, puis par la formule de la question 5.c, nous calculons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f*f(x)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f*f(x)|^2\,dx=\frac{1}{36\pi^3}\int_0^{\pi}\Big(2x^3-3\pi x^2+2\pi^3\Big)^2\,dx.$$

Cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^{\pi}\Big(2x^3-3\pi x^2+2\pi^3\Big)^2\,dx=\int_0^{\pi}\Big(4x^6-12\pi x^5+9\pi^2x^4+8\pi^3x^3-12\pi^4x^2+4\pi^6\Big)\,dx=\frac{83\pi^7}{35},$$

d'où la formule

$$S=\frac{\pi^8}{32}\Big(\frac{83}{1260}-\frac{1}{16}\Big)=\frac{17\pi^8}{161280}.$$