I \(a, (i) \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \quad \) \( (ii) \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \quad \) \( (iii) \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \quad \)

II. \(\forall a \in \mathbb{R}[X] \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

III. \(\forall a \in \mathbb{R}[X] \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

IV. \(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

V. \(\forall a \in \mathbb{R}[X] \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

VI. \(\forall a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

VII. \(\forall a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

VIII. \(\forall a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]

IX. \(\forall a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad a \circ b = a \circ b \quad \)

\[
\begin{align*}
\text{I.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y \\
\text{II.} & \quad \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} y
\end{align*}
\]
b. $\forall n \in \mathbb{N}, d^n(\mathbb{N}) = n \Rightarrow (\mathbb{R})_{x \in \mathbb{R}}$ est une base de $\mathbb{R}(x)$.

VII. $a$ divise $b$, alors : $\exists f \in \mathbb{R}(x)$ t.-$l$, $b = f \cdot a$.

VIII. (i) $x^3 + x^2 + x - 1 = (x + 1) (x^2 - x - 1) + 1$ ; (ii) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1) (x^2 + x + 1)$ ; (iii) $x^4 - 3x^2 - 3x - 1 = (x^4 + x^2 + x + 1)$.

IX. La division euclidienne fournit : $x^4 - x + a = (x^2 + x^2 + x + 1) (x^2 + x + 1) + (x - a)$.

X. Pour la division euclidienne : $f(x, y) \in \mathbb{R}(x) \times y$. $l = Q \cdot (x - a) + R$ avec $R(l) \in 0 = a = r(\pm \sqrt{y})$.

XI. a. Pour la division euclidienne : $f(x, y) \in \mathbb{R}(x) \times y$. $l = Q \cdot (x - a) + R(l)$.

XII. b. $X^4 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1) (x^2 + x + 1)$.

XV. $x^3 + x^2 + x - 1 = (x - 1) (x^2 + x + 1) + x^2 + 1$.
(v) \( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = \ell \); (vi) \( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = X \circ \ell \).

\( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = X \circ \ell \).

\( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = X \circ \ell \).

\( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = X \circ \ell \).

\( \ell \circ \circ \circ (\ell, \ell) = X \circ \ell \).
XX.1. Pour sérécence un réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel réel
et c = rV^3, soit la condition \( b^2 - 4ac = 0 \).

2. L'a une racine multiple \( \gamma \in \mathbb{K} \) si il existe \( \gamma \in \mathbb{K} \) t.q. \( \ell(\gamma) = \ell'(\gamma) = 0 \); comme \( \ell'(\gamma) = 3 \gamma^2 + p \) et \( \ell(\gamma) = \gamma^3 + \gamma + q \), seco équivalent en fait que : \( \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{4} = 0 \).

XXXII 2.a. \( \beta \in \mathbb{K} \) t.q. \( \beta + 1 = \alpha (\gamma - 1)^3 \); \( \ell' = \alpha' (\gamma - 1)^3 + 1 \) et \( \ell(x) = (x - 1)^3 \) (dou x - 1)^3 \) divise \( \ell \) ; de même, \( (x + 1)^3 \) divise \( \ell' \); il existe \( \alpha \in \mathbb{K} \) t.q. \( \beta = \alpha (x - 1)^3 \) et \( \alpha + 1 \) est premier avec \( x + 1 \) divise \( \alpha \); soit \( \alpha = 5(x + 1)^3 + 1 \) et \( \ell = 5(x + 1)^3 (x + 1)^3 \) est divisible par \( (x + 1)^3 (\gamma + 1)^3 \).

b. Comme \( \ell' = \ell'(x - 1) \) et \( (x - 1)^3 (x + 1)^3 \), il existe \( \beta \in \mathbb{K} \) t.q. \( \beta = \alpha (x - 1)^3 \) et \( \ell' = 5(x + 1)^3 (x - 1)^3 \) est divisible par \( \alpha \).

comme \( \ell(x) \leq 2 \), il existe \( \beta \in \mathbb{K} \) t.q. \( \beta = \alpha (x - 1)^3 \) et \( \ell' = (x + 1)^3 - 5(x + 1)^3 \) est divisible par \( \alpha \).

XXXIII 1. L'a \( a = 0 \), il existe \( \beta \in \mathbb{K} \) t.q. \( \beta = \alpha (x - 1)^3 \) et \( \ell' = \beta (x - 1)^3 \) divise \( \ell \).
1. Il existe \( x \in \mathbb{R} \) t.q. \( x^2 + 1 = 0 \), alors \( x = \pm i \), ce qui est absurde.

2. Lemme. \( e^{i \theta} \) est \( \mathbb{R} \)-période. On possède \( n \) racines réelles distinctes, et \( e^i \) possède \( n \) racines réelles distinctes, toutes les racines de \( e^i = (e^i)^n \) sont réelles ; comme \( e^{i2} \) n'a aucune racine réelle, toutes les racines complexes de \( e^{i2} + 1 \) sont de multiplicité

XXVI. Supposons que \( e^i \) possède une racine \( S \in \mathbb{R} \) de multiplicité supérieure ou égale à 2.

\( e^i(S) = e^i(S) = 1 \), comme \( e^{i} = e^{i-2k} \), \( S = \frac{\pi}{m} \), \( \frac{\pi}{m} \) \( \in \mathbb{R} \), donc \( \frac{\pi}{m} = 0 \Rightarrow S = 0 \).

Comme \( e^i(1) = 1 \), ceci est absurde. Comme \( e^i \) est réelle, \( e^i \) possède \( m \) racines distinctes dans \( \mathbb{R} \).

XXVII. (i) \( R = (x+i)(x+y)(x+y) \); (ii) \( Q = (x - \frac{i+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})(x - \frac{i+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})(x + \frac{i+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) \); (iii) \( R = (x-\frac{i}{\sqrt{2}})(x+\frac{i}{\sqrt{2}})(x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \); (iv) \( S = (x + i)(x - i)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 1)(x - 1) \).

XXVIII. 1. \( x + 1 = 1 \).

1. \( 1 + 1 \neq 1 \Rightarrow 1 = 1 \), \( 2 \neq 1 \).

2. \( e^{i2} = 1 \Rightarrow 3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1 \).

3. \( e = (x + i)^2 \), où \( x^2 + x + 1 \) est indiscutable dans \( \mathbb{R} \( (x + i)^2 = (x + i)(x + i) = (x^2 + x + 1) \).

XXX. \( x^{n-1} \cdot 2 \cdot \cos \theta \cdot x^{n-1} = (x^2 - 1)(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot \cos \theta \).